

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Άλγεβρα Α΄ Λυκείου**

Εκφωνήσεις



2025-2026

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

29-9-2025



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

Πραγματικοί αριθμοί

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

Θέμα 2ο

12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$, τότε να αποδείξετε

ότι: **α)** $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$ **β)** $\alpha = \beta$

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί.

Ορίζουμε $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

13053. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\beta + \gamma = -\alpha$. **ii.** $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

13472. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. **ii.** $\alpha + \beta = 1$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

14458. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i)** $(2y - x)^2 = 0$ **ii)** $y = \frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

14473. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

14489. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

14555. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$.

35388. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και

$$\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

Θέμα 4ο

15052. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

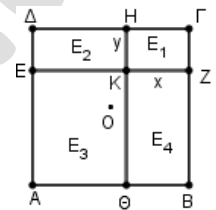
α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογώνιων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

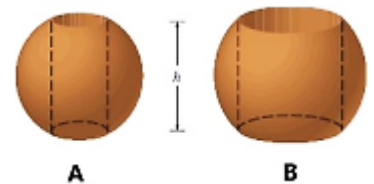
γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.



38850. Μια μικρή βιοτεχνία φτιάχνει κρίκους για πετσέτες, ανοίγοντας σε ξύλινες σφαίρες κυλινδρικές τρύπες με διάφορες διαμέτρους δ και ύψος $h = 4\text{cm}$ (με $\delta > h$). Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δυο τέτοιους κρίκους. Αποτελείται κάποιος από τους παρακάτω κρίκους από περισσότερο ξύλο;

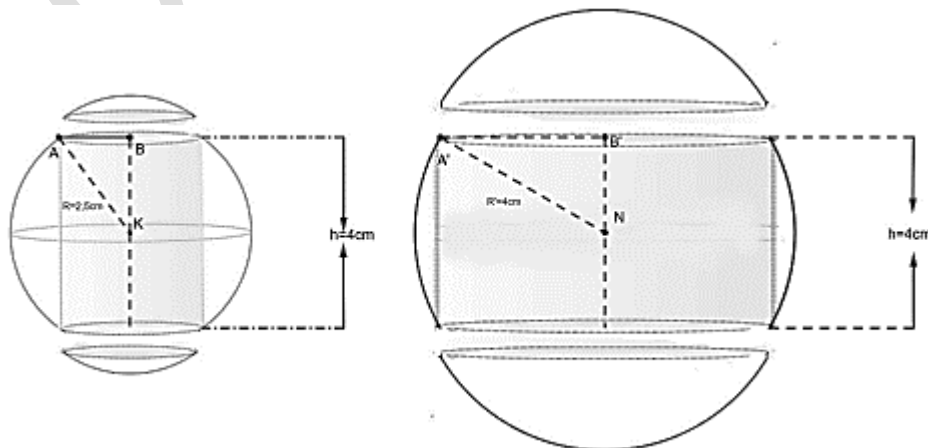


Μπορείτε να ελέγξετε την απάντησή σας στην παραπάνω ερώτηση ως

εξής: Παρακάτω βλέπετε τους κρίκους που έχουν προκύψει από τις ξύλινες σφαίρες, από τις οποίες έχουν αφαιρεθεί δυο σφαιρικά τμήματα πάνω και κάτω (δυο καπέλα) και έχει ανοιχτεί μια κυλινδρική τρύπα.

Πιο συγκεκριμένα, ο μικρός κρίκος (αριστερά) έχει προκύψει από ξύλινη σφαίρα ακτίνας

$R = 2,5\text{cm}$ και ο μεγάλος δεξιά από ξύλινη σφαίρα ακτίνας $R' = 4\text{cm}$.



α) i. Να υπολογίσετε την ακτίνα της κυλινδρικής τρύπας σε κάθε ένα από τα παραπάνω σχήματα.

ii. Να υπολογίσετε τον όγκο της κυλινδρικής τρύπας σε κάθε περίπτωση και να τον γράψετε στη μορφή $V = \alpha \cdot \pi$, με α φυσικό αριθμό.

β) i. Αν ο όγκος της κυλινδρικής τρύπας στον μικρό κρίκο είναι $V_A = 9\pi\text{cm}^3$ και στον μεγάλο κρίκο είναι $V_B = 48\pi\text{cm}^3$ και αν είναι γνωστό ότι ο όγκος των δύο σφαιρικών τμημάτων (τα δύο καπέλα πάνω και κάτω σε κάθε σχήμα) είναι για την μικρή σφαίρα $\frac{7}{6}\pi$ και για τη μεγάλη $\frac{80}{3}\pi$, να βρείτε τον όγκο του ξύλου που έμεινε (μετά τη δημιουργία της κυλινδρικής τρύπας) σε καθέναν από τους παραπάνω κρίκους.

ii. Στη βιοτεχνία οι τεχνίτες προβληματίστηκαν με το εξής: μήπως αν επιλέξουν μια οποιαδήποτε σφαίρα ακτίνας $R_1 > 2$, για να φτιάξουν τον κρίκο με τον ίδιο τρόπο που περιγράφεται παραπάνω, θα μείνει ο ίδιος όγκος ξύλου που έμεινε και στους δυο προηγούμενους; Ρώτησαν έναν φίλο τους που μπορούσε να τους βοηθήσει και τους είπε: «Ο όγκος του ξύλου που θα μείνει θα είναι:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_1^3 - 4\pi(R_1^2 - 4) - \frac{4}{3}\pi(R_1 - 2)^2(R_1 + 1)$$

και είναι ίσος με τον όγκο του ξύλου που έμεινε και στους δυο προηγούμενους (που βρήκατε στο βι) ερώτημα)». Με δεδομένο τον παραπάνω τύπο, να ελέγξετε αν ο ισχυρισμός είναι σωστός. Μπορούμε να βγάλουμε ένα συμπέρασμα για τον όγκο του ξύλου που μένει σε κάθε περίπτωση στους κρίκους και τελικά να απαντήσουμε στην ερώτηση που τέθηκε στην αρχή;

Δίνεται ο όγκος του κυλίνδρου: $V = \pi r^2 \cdot h$, όπου r η ακτίνα και h το ύψος του κυλίνδρου και ο όγκος της σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας.

38823. Οι αριθμοί παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαχείριση δεδομένων, στις μετρήσεις, στις εμπορικές συναλλαγές και σε πολλές άλλες δραστηριότητες. Για παράδειγμα, οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αρίθμηση βημάτων σε μια διαδικασία ή για την κατάταξη διαγωνιζομένων σε έναν διαγωνισμό· οι ακέραιοι στη μέτρηση πλεονάσματος ή ελλείμματος προϊόντων στο εμπόριο· οι ρητοί στις ακριβείς μετρήσεις μεγεθών και στον λόγο διαστάσεων των οθονών των τηλεοράσεων· τέλος, οι άρρητοι στην κρυπτογραφία και την προστασία ευαίσθητων δεδομένων. Για τον λόγο αυτόν χρειάζεται να μπορούμε να ταξινομούμε τους αριθμούς ανάλογα με το είδος τους.

α) Δίνονται οι αριθμοί: $2, 3 - \sqrt{2}, -2, \sqrt{16}, \pi, 3,14, 0,33..., 1,1010010001..., \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{7}$

Να βασιστείτε στην παραπάνω περιγραφή, για να υποδείξετε ποιοι από τους αριθμούς (ή ίσοι με αυτούς):

- i.** είναι φυσικοί και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την αρίθμηση βημάτων.
- ii.** είναι ακέραιοι και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στη μέτρηση πλεονάσματος ή ελλείμματος προϊόντων.
- iii.** είναι ρητοί και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν τον λόγο διαστάσεων της οθόνης μιας τηλεόρασης.
- iv.** είναι άρρητοι και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην κρυπτογραφία.

β) Ο Γιάννης ενδιαφέρεται για την αγορά μιας νέας τηλεόρασης 46 ιντσών, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, από μια συγκεκριμένη εταιρεία. Κάνοντας μια έρευνα στο διαδίκτυο, διαπιστώνει ότι ένα σημαντικό κριτήριο για την αγορά τηλεόρασης είναι ο λόγος των διαστάσεων της (πλάτος προς ύψος). Όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό του πλάτους σε σχέση με το ύψος της τηλεόρασης, τόσο καλύτερη είναι η εμπειρία προβολής. Η εταιρεία διαθέτει τηλεοράσεις 46 ιντσών με λόγο διαστάσεων 16:9 και με λόγο διαστάσεων 4:3. Ποια τηλεόραση πρέπει να διαλέξει ο Γιάννης σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο;

Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

γ) Η Μαρία ισχυρίζεται ότι μπορεί πάντοτε να χρησιμοποιήσει το άθροισμα δύο άρρητων στην κρυπτογραφία, γιατί το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι πάντα άρρητος αριθμός.

- i.** Να γράψετε δύο άρρητους που το άθροισμά τους να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κρυπτογραφία και να εξηγήσετε γιατί επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό της Μαρίας.
- ii.** Να γράψετε δύο άρρητους αριθμούς που να αντικρούουν τον ισχυρισμό της Μαρίας και να εξηγήσετε γιατί τον αντικρούουν.
- iii.** Να εξηγήσετε αν ο ισχυρισμός της Μαρίας είναι σωστός ή λανθασμένος με βάση τους αριθμούς που βρήκατε παραπάνω.

Θέμα 3ο

14329. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α , β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.
 β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12673. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

12922. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.
 β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

13323. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0.$$

14410. Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: α) $\alpha + 2\beta$ β) $\alpha - \beta$

14492. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

14704. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ β) $2x - 3y$ γ) $\frac{x}{y}$

35040. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

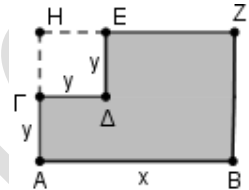
β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35549. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



36884. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

37179. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

37817. Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

Θέμα 4ο

14820. α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

ii. Με τη βοήθεια του β) i με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Θέμα 3ο

14602. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

14713. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει: **i.** $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 2ο

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$.

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

13177. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

14071. α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

$$A. K = |x + 1| + |x - 2| \quad B. K = |x - 1| + |x + 2| \quad \Gamma. K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν είναι $K = |x + 1| + |x - 2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$.

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$.

14412. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

β) Να δείξετε $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

14491.14306. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

14572. Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. **β)** $|2x + 4| < 2$.

14599. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει $x^2 < 1$.

14617. Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $6 < x < 8$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι $6 < k < 8$, να αποδείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$.

15054. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

35041. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

35043. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$.

35044. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$.

35112. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x - 4$ **ii)** για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8 - 3x$.

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.

35404. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

35412. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$.

35415. Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

36777. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

36894. α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

36898. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37200. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

37201. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** $A = x - y + 2$.

β) $0 < A < 4$.

Θέμα 4ο

13179. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right|$.

33888. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β .

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.

33896. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

36671. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4| + |x-14| = 18$.

36672. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i)** $|x+2|$ **ii)** $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2| + |x-7|$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

36673. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
y = f(x)	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

14811. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο M(x, y) με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

iii. Ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

v. Η εξίσωση $\alpha x = \alpha$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

14932. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.

ii. Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$.

iii. Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε $x=3$ ή $x=-3$.

v. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα y'y.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12943. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

14452. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

14682. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

14750. Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$ β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

14774. α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$.

14849. α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

15051. α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

34152. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

34155. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

34157. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

36778. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

37172. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

37192. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \quad \sqrt{3} \approx 1,73, \quad \sqrt{5} \approx 2,24, \quad \sqrt{7} \approx 2,64.$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}$.

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

37193. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

37194.α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6 - \sqrt[3]{30}$.

37195. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

37196. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

37197. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

37198. Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

37199. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

β) Να δείξετε ότι: $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

Θέμα 4ο

14931. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

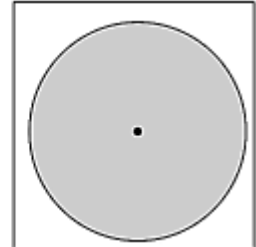
38812. Ο σχεδιαστής μιας εταιρείας κατασκευής επίπλων έχει σχεδιάσει το τραπέζι της εικόνας (αριστερά), που η κυκλική γυάλινη επιφάνειά του (δεξιά) έχει εμβαδόν 1,5 τετραγωνικό μέτρο.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι ίση με $\rho = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι μικρότερη από 0,75 μέτρα.

γ) Ένας τεχνίτης διαθέτει ένα τετράγωνο κομμάτι τζαμιού με εμβαδόν 2,5 τετραγωνικά μέτρα. Επαρκεί ώστε να φτιάξει την επιφάνεια του τραπεζιού;

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός είναι κύκλου πr^2 , όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου και $\pi \approx 3,14$.



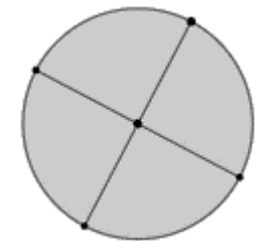
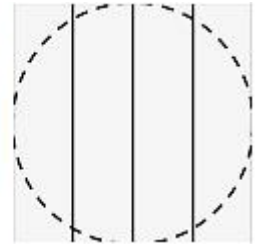
38814. Ένας ξυλουργός κατασκευάζει κυκλικά καπάκια βαρελιών χρησιμοποιώντας σανίδες σχήματος ορθογωνίου. Με αυτές κατασκευάζει τετράγωνα, όπως στη δεξιά εικόνα, και κόβει το καπάκι, όπως φαίνεται στις διακεκομμένες γραμμές. Ο ξυλουργός για την κατασκευή ενός τετραγώνου χρησιμοποίησε ακριβώς 4 σανίδες με διαστάσεις α και β .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται από την παράσταση $4\alpha\beta$, σε κάθε περίπτωση.

β) Αν κάθε σανίδα έχει εμβαδόν 0,3 τετραγωνικά μέτρα, ο ξυλουργός μπορεί να κατασκευάσει καπάκι με διάμετρο 1,3 μέτρα;

γ) Για καλύτερη στήριξη ο ξυλουργός τοποθετεί ένα μεταλλικό X όπως αυτό του σχήματος, το οποίο βιδώνεται στο κέντρο και σε τέσσερα σημεία της περιφέρειας του καπακιού. Αν το εμβαδόν του καπακιού είναι 1,5 τετραγωνικό μέτρο, τότε επαρκεί μια μεταλλική ράβδος μήκους 3,1 μέτρων για την κατασκευή του μεταλλικού X;

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός είναι κύκλου πr^2 , όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου και $\pi \approx 3,14$.



Θέμα 3ο

14805. Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού****Θέμα 2ο**

14741. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K - 2) = 0$.

34146. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις: **i)** όταν $\alpha = 1$

ii) όταν $\alpha = -3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

34163. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

12857. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

14224. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0, x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34872. Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.

36896. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β) i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

Θέμα 4ο

13170. Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από

δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης: $(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$.

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

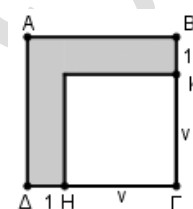
14543. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στη μορφή $a = 2k + 1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με $(ΓΗ) = (ΓΚ) = v$ και $(ΒΚ) = (ΔΗ) = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου v .



38830. Ο ολικός δείκτης γονιμότητας (Total Fertility Rate) είναι ένας δημογραφικός δείκτης που εκτιμά τον μέσο αριθμό παιδιών που θα γεννούσε μια γυναίκα κατά τη διάρκεια της ζωής της, σύμφωνα με τα ποσοστά γονιμότητας ανά ηλικία ενός δεδομένου έτους. Ο τύπος με τον οποίο υπολογίζεται ο ολικός

δείκτης γονιμότητας T είναι: $T = \frac{N \cdot 30}{F}$, όπου N ο αριθμός των γεννήσεων και F ο αριθμός των γυναικών

που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία (15-49 ετών).

α) Ένα άρθρο στο διαδίκτυο εξέφραζε τον φόβο του για τη γήρανση του πληθυσμού στην Ελλάδα, αναφέροντας ότι ο ολικός δείκτης γονιμότητας στη χώρα το 2022 ήταν μόλις 1,32 γεννήσεις ανά γυναίκα. Πόσες περίπου ήταν οι γεννήσεις το 2022, αν οι γυναίκες αναπαραγωγικής ηλικίας ήταν περίπου 1.730.000;

β) Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Αρχή) το 2023 στην Ελλάδα οι γεννήσεις ανήλθαν σε 71.455 και ο ολικός δείκτης γονιμότητας ήταν 1,26 γεννήσεις ανά γυναίκα. Με βάση τον παραπάνω τύπο πόσες περίπου γυναίκες στην Ελλάδα το 2023 βρίσκονταν σε αναπαραγωγική ηλικία, δηλαδή ήταν από 15-49 ετών;

γ) Να γράψετε έναν τύπο, ο οποίος να υπολογίζει τον αριθμό των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία, δηλαδή το F , όταν γνωρίζετε τον ολικό δείκτη γονιμότητας T και τον αριθμό των γεννήσεων N σε ένα έτος.

δ) Αν ο αριθμός των γεννήσεων N αυξηθεί κατά 20%, πώς θα αλλάξει ο ολικός δείκτης γονιμότητας, εφόσον ο αριθμός των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία μείνει σταθερός;

38851. Ο ενδοφλέβιος ορός χρησιμοποιείται για τη χορήγηση υγρών και φαρμάκων στους ασθενείς.

Οι νοσηλεύτές/τριες πρέπει να υπολογίζουν το ρυθμό ροής D ενός ορού σε σταγόνες ανά λεπτό. Οι

νοσηλεύτές/τριες χρησιμοποιούν τον τύπο: $D = \frac{d \cdot V}{n}$, όπου V είναι ο όγκος του ορού σε mL, d είναι ο

συντελεστής σταγονομετρίας σε σταγόνες/mL και n είναι τα λεπτά που πρέπει να διαρκέσει ο ορός.

α) i. Ένας ασθενής εισάγεται στα επείγοντα με σοβαρό αλλεργικό σοκ. Ο γιατρός δίνει εντολή να χορηγηθούν ενδοφλεβίως $V = 250$ mL διαλύματος (που περιέχει αδρεναλίνη) μέσα σε 20 λεπτά. Η συσκευή που χρησιμοποιείται έχει συντελεστή σταγονομετρίας $d = 20$ σταγόνες/mL. Ποιος πρέπει να είναι ο ρυθμός ροής D του ορού, για να χορηγηθεί η αδρεναλίνη στο σωστό χρόνο;

ii. Ένας ασθενής με υπογλυκαιμία χρειάζεται να λάβει $V = 500$ mL διαλύματος (που περιέχει Κάλιο).

Η συσκευή έγχυσης έχει συντελεστή σταγονομετρίας $d = 15$ σταγόνες/mL και ο ρυθμός ροής του

- ορού είναι $D = 25$ σταγόνες ανά λεπτό. Σε πόσες ώρες θα έχει χορηγηθεί το Κάλιο;
- β)** Να υπολογίσετε τον όγκο V ενός διαλύματος που χορηγείται σε 6 ώρες, αν:
- Ο ρυθμός ροής D του ορού είναι διπλάσιος του συντελεστή σταγονομετρίας d .
 - Ο συντελεστής σταγονομετρίας d είναι το $1/3$ του ρυθμού ροής D του ορού.
- γ)** Να υποθέσετε ότι είστε νοσηλεύτης/τρια και έχετε στην διάθεσή σας μια κούτα με ίδιες συσκευές έγχυσης, αλλά δεν γνωρίζετε τον συντελεστή σταγονομετρίας τους d . Διαθέτετε επίσης ορούς των $V = 100\text{mL}$ και ένα χρονόμετρο. Να περιγράψετε τρόπους για να υπολογίσετε τον d .

38926. Για να μετρήσουμε την καθαρότητα του χρυσού, χρησιμοποιούμε το καράτι, το οποίο δείχνει τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα μετάλλων. Σε φύλλο χρυσού 24

καρατίων τα $\frac{24}{24}$ ή αλλιώς το 100% είναι καθαρός χρυσός.

- α)** Να βρείτε το ποσοστό του καθαρού χρυσού σε ένα μείγμα 18 караτίων, σε ένα μείγμα 14 караτίων και σε ένα μείγμα 9 караτίων.
- β)** Από δύο μείγματα 24 και 9 караτίων φτιάχνουμε ένα νέο. Αν από το πρώτο μείγμα πάρουμε 17 γραμμάρια και από το δεύτερο 7 γραμμάρια, τότε να αποδείξετε ότι το νέο μείγμα είναι 19,625 караτίων.
- γ)** Έχουμε δύο μείγματα, το ένα 24 караτίων και το άλλο 9 караτίων. Πόσα γραμμάρια θα χρησιμοποιήσουμε από το καθένα, για να φτιάξουμε ένα μείγμα 18 караτίων συνολικού βάρους 20 γραμμαρίων;

(Δίνεται: $\frac{63}{24} = 2,625$).

Εξισώσεις με απόλυτα

13169. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

- α)** Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.
- β)** Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

14649. Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α)** Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$.
- β) i.** Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.
- ii.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

14730. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε
- Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$.
 - Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$.
- β)** Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35033. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α)** Αν $2 < x < 3$ να δείξετε ότι $A = 2x - 4$.
- β)** Αν $2 < x < 3$ να δείξετε ότι $A + B = x - 1$.
- γ)** Υπάρχει $x \in (2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η εξίσωση $x^y = a$

Θέμα 3ο

14052. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + x = 0$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Θέμα 2ο

13028. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$ με $a \in \mathbb{R}^* (1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β) Για $a=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

34161. α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $ax^2 + \beta x + 3 = 0$.

35100. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

37178. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

37181. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

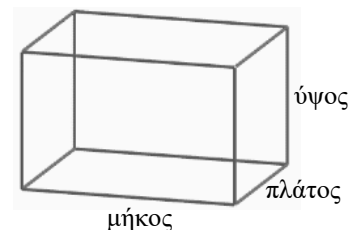
Θέμα 4ο

12683. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της.

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 .

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.



14651. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

14406. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} (\alpha\beta)^{25}}$.

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$ να τους υπολογίσετε.

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

33889. α) Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + bx + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4)

34322. Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ) i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή: $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

iii. να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

34327.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

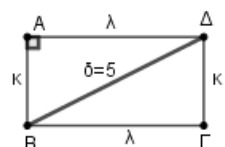
ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

34390. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14$ cm και μια διαγώνιος $\delta = 5$ cm.

α) i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12$ cm².

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.



β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14 \text{ cm}$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$.

34544. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

36651. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

36661. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

36663. Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά $d \text{ cm}$ ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1) \text{ cm}$.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

38861. Υπάρχουν αρκετοί τύποι για τον υπολογισμό της δόσης ενός φαρμάκου για παιδιά με βάση τη δόση για ενήλικες. Κάποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν την ηλικία του παιδιού και κάποιοι το σωματικό του βάρος. Οι τύποι που δίνονται στη συνέχεια χρησιμοποιούν την ηλικία του παιδιού και ισχύουν για παιδιά με μέσο βάρος και μέση ανάπτυξη.

Τύπος του Γιούνγκ (Young's Formula): Δόση για παιδιά $= \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 12} \cdot \text{Δόση για ενήλικες}$, όπου ε είναι η ηλικία του παιδιού (σε έτη) από ενός έτους μέχρι 12 ετών.

Τύπος του Φράιντ (Fried's Formula): Δόση για παιδιά $= \frac{\mu}{150} \cdot \text{Δόση για ενήλικες}$ όπου μ είναι η ηλικία του παιδιού (σε μήνες) έως 24 μηνών.

α) Αν το παιδί είναι 1,5 έτους, να βρείτε τι μέρος της δόσης που αντιστοιχεί στον ενήλικα θα πάρει το παιδί, χρησιμοποιώντας καθέναν από τους δύο παραπάνω τύπους.

β) i. Να βρείτε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Γιούνγκ, πόσων ετών πρέπει να είναι το παιδί, για να πάρει δόση φαρμάκου 60mg, εάν η δόση για τον ενήλικα είναι 300mg.

ii. Να δείξετε ότι σύμφωνα με τον τύπο του Φράιντ, για τη δόση του παιδιού ισχύει:

$$0 < \text{Δόση για παιδιά} \leq \frac{4}{25} \cdot \text{Δόση για ενήλικες}.$$

iii. Θα μπορούσε με βάση τον τύπο του Φράιντ η δόση για το παιδί να είναι 60mg, αν η δόση για τον ενήλικα είναι 300mg; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Θα μπορούσε σε κάποια ηλικία το παιδί να πάρει την ίδια δόση του φαρμάκου με βάση και τους δύο παραπάνω τύπους; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

38923. Η Μαρία επιθυμεί να φτιάξει έναν ορθογώνιο κήπο έξω από το σπίτι της και, για να υπολογίσει το μήκος και το πλάτος του, θέλει να ικανοποιούνται δύο βασικές προδιαγραφές: η περίμετρος του κήπου να είναι 26 m και το εμβαδόν του να είναι 40 m^2 .

α) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση, η οποία να έχει ως λύσεις το μήκος και το πλάτος του κήπου.

β) Ποιες είναι οι διαστάσεις του κήπου (μήκος και πλάτος);

γ) Η Μαρία θέλει να βάλει στη μέση του κήπου ένα στρογγυλό παρτέρι με εμβαδόν 20 m^2 .

Θα χωρέσει το παρτέρι στον κήπο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Δίνεται το εμβαδόν κύκλου $E = \pi r^2$, όπου r η ακτίνα του κύκλου και $\pi \cong 3,14$).

δ) Η Μαρία σκέφτεται μήπως αλλάξει το πλάτος του κήπου, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν του στα 40 m^2 .

Επειδή όμως περιορίζεται από τον διαθέσιμο χώρο του οικοπέδου του σπιτιού, η νέα διάσταση του πλάτους πρέπει να είναι μικρότερη από 7 m και μεγαλύτερη από 4m. Να υπολογίσετε το διάστημα των τιμών που μπορεί να έχει το μήκος του κήπου.

Δίνεται $\sqrt{6,37} \cong 2,52$.

3^ο Θέμα

14749. α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x - |x|}$.

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$.

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2$.

14578. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

Θέμα 4ο

33826. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Τύποι Vieta

Θέμα 2ο

14577. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

34150. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

- α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$.
 β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .
 γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

34154. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

- α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.
 β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

34436. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

- α) Να δείξετε ότι: **i)** $A + B = \frac{1}{2}$ **ii)** $A \cdot B = \frac{1}{20}$
 β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

34920. Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

- α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και $x_1 x_2$.
 β) Να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις $4x_1$ και $4x_2$.

35038. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.
 β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

36890. α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

- β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

37171. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.
 β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Θέμα 4ο

14490. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

- α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .
 β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
 i) Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.
 ii) Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.
 γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.
 β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.
 γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$
 i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γ i), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$.

33584. Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$ τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$.

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ .

33585. Δίνονται η εξίσωση: $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$ με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (a^2 + 1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = a$ και $p_2 = -\frac{1}{a}$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε $|p_1 - p_2| = 2$.

34310. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

36675. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$.

ii) να βρείτε τον αριθμό λ .

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

Θέμα 2ο

36888. α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Θέμα 4ο

13312. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

38807. Η καρδιά στον άνθρωπο χτυπά περισσότερο από 100.000 φορές την ημέρα. Κάθε φορά που χτυπά, διώχνει μια ποσότητα αίματος στις αρτηρίες, η οποία αυξάνει την πίεση. Η συστολική πίεση είναι η πίεση που ασκεί το αίμα στο τοίχωμα των αρτηριών, καθώς φεύγει από την καρδιά, ενώ η διαστολική πίεση είναι η πίεση που ασκεί το αίμα στα τοιχώματα των αρτηριών, όταν η καρδιά ηρεμεί. Οι φυσιολογικές τιμές της αρτηριακής πίεσης για τους ενήλικες είναι για τη διαστολική (p) μεταξύ 60 έως και 80 mmHg και για τη συστολική (P) μεταξύ 90 έως και 120 mmHg (χιλιοστά της στήλης του υδραργύρου). Η μέτρηση της αρτηριακής πίεσης γίνεται με δυο τρόπους: με άμεση μέτρηση, μια διαδικασία επεμβατική που γίνεται μόνο στο νοσοκομείο, και με έμμεση μέτρηση, που γίνεται με χρήση ενός κοινού πιεσόμετρου στο σπίτι ή στο φαρμακείο. Η άμεση μέτρηση δείχνει την πραγματική πίεση και έχει κάποια απόκλιση από τη μέτρηση με το πιεσόμετρο. Έχουμε ένα ηλεκτρονικό πιεσόμετρο, που ξέρουμε ότι δίνει τιμές μετρήσεων μικρότερες κατά 4 mmHg από τις πραγματικές. **α)** Για κάθε ένα από τα δύο είδη πίεσης (συστολική και διαστολική), να βρείτε μια σχέση με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την άμεση τιμή της πίεσης, όταν γνωρίζουμε την έμμεση πίεση.

β) Οι μετρήσεις που μας δίνει το πιεσόμετρο είναι P'/p' mmHg. Θεωρούμε πως ένας ασθενής έχει υπόταση, αν η αρτηριακή του πίεση είναι κάτω από 90/60 mmHg, και υπέρταση, όταν η αρτηριακή του πίεση είναι πάνω από 140/90 mmHg σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Αν μετράμε την πίεση με πιεσόμετρο, ποιες τιμές ορίζουν αν έχουμε υπόταση ή υπέρταση;

γ) Το εύρος παλμών είναι η διαφορά μεταξύ της συστολικής (P) και της διαστολικής (p) αρτηριακής πίεσης. Ένα φυσιολογικό εύρος παλμών κυμαίνεται μεταξύ 40 και 60 mmHg.

i. Ένα άτομο μετράει με το πιεσόμετρο και έχει αρτηριακή πίεση: P'/p' mmHg. Να γράψετε μια ανίσωση που δείχνει ότι το εύρος παλμών του είναι μεταξύ 40 και 60 mmHg.

ii. Αν γνωρίζουμε ότι η διαστολική πίεση p' ενός ατόμου είναι 80 mmHg, ποιο εύρος τιμών μπορεί να έχει η συστολική του πίεση P' , ώστε το εύρος παλμών του να παραμένει φυσιολογικό;

38809. Δύο μοτοσυκλέτες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις στην Εγνατία οδό. Η μία ξεκινά από την Καβάλα με σταθερή ταχύτητα 120 km/h και η άλλη ξεκινά ταυτόχρονα από τα Ιωάννινα με σταθερή ταχύτητα 100 km/h. Η Καβάλα απέχει 407 χιλιόμετρα από τα Ιωάννινα.



Οι αναβάτες θέλουν να μπορούν να συνεννοηθούν. Για τον λόγο αυτό είναι εξοπλισμένοι με ασύρματους ενδοεπικοινωνίας, αλλά πρέπει να είναι σε απόσταση το πολύ 10 χιλιομέτρων η μια μοτοσυκλέτα από την άλλη, για να μπορούν να έρθουν σε επαφή. Αν t είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την αρχή του ταξιδιού:

- α) Πώς εκφράζεται η απόσταση που έχει κάθε μοτοσυκλέτα από την Καβάλα ως συνάρτηση του χρόνου t ;
 β) Πότε θα μπορέσουν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους οι αναβάτες;
 γ) Πότε θα διασταυρωθούν και πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει κάθε μοτοσυκλέτα;
 δ) Μετά τη διασταύρωσή τους και καθώς θα απομακρύνεται η μια μοτοσυκλέτα από την άλλη, για πόσο χρόνο ακόμα θα μπορούν να επικοινωνούν οι αναβάτες χρησιμοποιώντας τους ασυρμάτους;
 Δίνεται ότι: $417 : 220 \approx 1,9$ και $397 : 220 \approx 1,8$.

38816. Το φετινό πανελλήνιο πρωτάθλημα ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού διεξάγεται σε 10 φάσεις. Σε κάθε φάση όλοι οι συμμετέχοντες αντιμετωπίζουν άλλους συμμετέχοντες ύστερα από κλήρωση. Σε κάθε παρτίδα συμμετέχουν από 2 έως 12 παίκτες και υπάρχει 1 νικητής. Η βαθμολογία του νικητή κάθε παρτίδας προκύπτει από τον υπολογισμό: (φάση πρωταθλήματος) · (ηττημένοι παρτίδας) + 1.200. Για παράδειγμα, ο νικητής μιας παρτίδας 11 παικτών στη 2η φάση του πρωταθλήματος κερδίζει 1220 βαθμούς. α) Η Μαρία κέρδισε μια παρτίδα 9 παικτών στην 3η φάση του πρωταθλήματος και μια παρτίδα 7 παικτών στην 5η φάση του πρωταθλήματος. Πόσους βαθμούς κέρδισε συνολικά για αυτές τις νίκες της; β) Στο προηγούμενο πανελλήνιο πρωτάθλημα η βαθμολογία του νικητή κάθε παρτίδας υπολογιζόταν ως εξής:

$$\text{Βαθμοί} = (\text{ηττημένοι παρτίδας}) \cdot (\text{διάρκεια παρτίδας σε λεπτά} - 100) + 800.$$

Και πέρσι ίσχυε ότι σε κάθε παρτίδα συμμετέχουν μέχρι 12 παίκτες, αλλά ανακηρύσσεται ένας νικητής. Ο Θρασύβουλος στο προηγούμενο πρωτάθλημα κέρδισε 400 βαθμούς με μία μόνο νίκη. Αν t είναι η διάρκεια, σε λεπτά, της παρτίδας που κέρδισε ο Θρασύβουλος και x το πλήθος των ηττημένων της παρτίδας,

i. Να αποδείξετε ότι $t = 100 - \frac{400}{x}$.

ii. Είναι αληθής η ανισότητα $100 - \frac{400}{x} > 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Πόσοι μπορεί να ήταν οι αντίπαλοι που κέρδισε ο Θρασύβουλος; Να εξηγήσετε το συμπέρασμά σας.

iv. Αν ο Θρασύβουλος ήταν ο νικητής της ίδιας ακριβώς παρτίδας αλλά στην τελευταία φάση του φετινού πρωταθλήματος, θα μπορούσε να κερδίσει 1.240 βαθμούς;

38843. Για να γίνει ένα πείραμα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν δύο συγκοινωνούντα δοχεία, τα οποία συνδέονται μέσω ενός μικρού σωλήνα που περιέχει υγρό αμελητέου όγκου. Το δοχείο B αποτελείται από δύο μέρη. Το κάτω μέρος έχει συνολικό όγκο 100 cm^3 , ενώ στη συνέχεια είναι κυλινδρικό με εμβαδόν βάσης 20 cm^2 . Το δοχείο A έχει κυλινδρικό σχήμα και εμβαδόν βάσης $\alpha \text{ cm}^2$. Επίσης, το δοχείο A είναι τοποθετημένο πιο ψηλά, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(Δίνεται ότι σε ένα κυλινδρικό δοχείο ισχύει

$$\text{Όγκος} = \text{Εμβαδόν βάσης} \times \text{Ύψος})$$

α) i. Να υπολογίσετε τον όγκο του υγρού στο δοχείο B, αν $h = 5 \text{ cm}$.

ii. Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τον όγκο V_B του υγρού στο δοχείο B ως συνάρτηση του ύψους h . Να κάνετε το ίδιο για τον όγκο V_A του υγρού στο δοχείο A.

β) Ιδανικά, για να πετύχει το πείραμα, πρέπει τα δύο δοχεία να γεμίσουν τόσο, ώστε να περιέχουν τον ίδιο όγκο υγρού. Για το δοχείο A έχουμε στη διάθεσή μας διάφορες επιλογές όσον αφορά το εμβαδόν της βάσης του. Τρεις από αυτές είναι οι ακόλουθες:

A. $\alpha = 10 \text{ cm}^2$

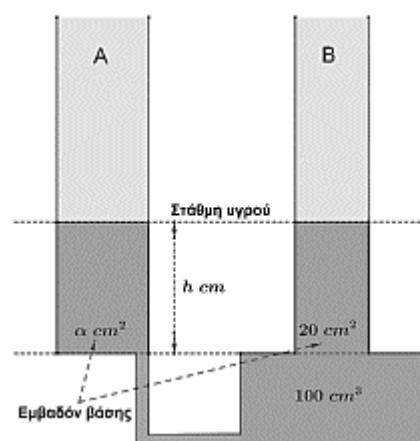
B. $\alpha = 20 \text{ cm}^2$

Γ. $\alpha = 40 \text{ cm}^2$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί/ούν κάποια/ες από αυτές; Να εξηγήσετε γιατί.

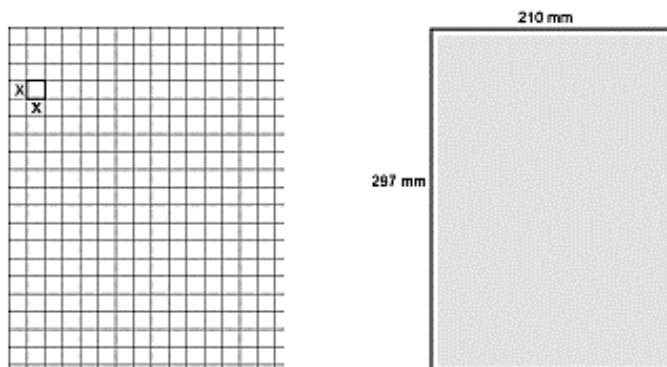
γ) Τελικά για δοχείο A επιλέχθηκε ένα με εμβαδόν βάσης 30 cm^2 .

i. Αν και το ιδανικό είναι τα δύο δοχεία να περιέχουν τον ίδιο όγκο, το πείραμα μπορεί να γίνει με σχετική επιτυχία όσο η διαφορά ανάμεσα στους όγκους των δύο δοχείων είναι το πολύ 10 cm^3 . Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ύψος h ;



- ii. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ύψος h , αν επιπλέον ο συνολικός όγκος στα δύο δοχεία δεν μπορεί να ξεπερνά τα 600 cm^3 ;

38841. Μια βιοτεχνία κατασκευής τετραδίων παράγει τετράδια που η κάθε σελίδα τους είναι γεμάτη με τετραγωνάκια, όπως στο σχήμα (το λεγόμενο τετράδιο «καρέ»). Με x συμβολίζουμε το μήκος της πλευράς κάθε τετραγώνου.



Οι διαστάσεις κάθε σελίδας του τετραδίου είναι 210 mm επί 297 mm . Στο τέλος της σελίδας του τετραδίου (κάτω και δεξιά) ενδέχεται τα τετράγωνα να εμφανίζονται κομμένα λόγω των διαστάσεών τους (δηλαδή να μη χωράνε ολόκληρα).

α) Αν κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά με μήκος $x = 8 \text{ mm}$, πόσα ολόκληρα τετραγωνάκια χωράνε οριζόντια σε κάθε γραμμή της σελίδας;

β) Αν σε κάθε στήλη χωράνε 37 ολόκληρα τετραγωνάκια, να αποδείξετε ότι:

i. $38x > 297$

ii. Το μήκος της πλευράς του κάθε τετραγώνου είναι το πολύ ίσο με $\frac{297}{37} \text{ mm}$.

iii. $\frac{297}{38} < x < \frac{297}{37}$.

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος x της πλευράς κάθε τετραγώνου, αν κάθε γραμμή της σελίδας του τετραδίου χωράει 23 ολόκληρα τετραγωνάκια και η κάθε του στήλη χωράει 33 ολόκληρα τετραγωνάκια;

Δίνονται: $\frac{210}{23} \cong 9,23$, $\frac{297}{34} \cong 8,74$.

38848. Η αιθανόλη, κοινώς οινόπνευμα ή αλκοόλ, είναι μία χημική ένωση που χρησιμοποιείται στην αντισηψία και στην αρωματοποίηση. Ένα υγρό καθαριστικό χεριών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισηπτικό, όταν περιέχει αιθανόλη κατά περισσότερο από 30%. Στην αρωματοποίηση η αιθανόλη χρησιμοποιείται ως βάση για τα αρώματα μαζί με αιθέρια έλαια. Το ποσοστό συμμετοχής της αιθανόλης σε ένα άρωμα είναι συνήθως μεγαλύτερο του 70%.

α) Η Μαρία εργάζεται στην παραγωγή καθαριστικών χεριών. Σε ένα δοχείο περιέχονται 500 ml ενός υγρού καθαριστικού χεριών με 20% αιθανόλη.

i. Πόσα ml αιθανόλης περιέχει το υγρό καθαριστικό;

ii. Η Μαρία σκέφτεται ότι «εάν στο καθαριστικό χεριών προσθέσουμε αιθανόλη, ώστε να διπλασιαστεί η ποσότητά της, τότε θα διπλασιαστεί και το ποσοστό της αιθανόλης που περιέχει το καθαριστικό». Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τη σκέψη της Μαρίας; Να εξηγήσετε την επιλογή σας.

iii. Πόσα ml αιθανόλης πρέπει η Μαρία να προσθέσει στο παραπάνω υγρό καθαριστικό, ώστε το ποσοστό της αιθανόλης να είναι 45%;

iv. Πόσα τουλάχιστον ml αιθανόλης πρέπει η Μαρία να προσθέσει στο παραπάνω υγρό καθαριστικό, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισηπτικό χεριών;

β) Η Σοφία έφτιαξε μόνη της ένα άρωμα 150 ml χρησιμοποιώντας 80% αιθανόλη και αιθέρια έλαια. Επειδή της φάνηκε βαρύ, αποφάσισε να αγοράσει επιπλέον αιθανόλη, για να το αραιώσει έτσι, ώστε η περιεκτικότητά του αραιωμένου αρώματος σε αιθέρια έλαια να είναι 15%. Πόσα ml αιθανόλης πρέπει να αγοράσει επιπλέον;

38868. Εάν ο οργανισμός ενός ενήλικα μειώνει τη συγκέντρωση αλκοόλ στο αίμα με ρυθμό περίπου 0,015 μονάδες BAC (Blood Alcohol Concentration) ανά ώρα, τότε η συγκέντρωση αλκοόλ στο αίμα μετά από t

ώρες δίνεται από τη σχέση: $BAC = \frac{V \cdot c}{730} - 0,015 \cdot t$, όπου V ο όγκος σε ml του ποτού που πίνουμε και c το

ποσοστό (%) του αλκοόλ που περιέχει το ποτό.

α) Να βρείτε ποια είναι η συγκέντρωση αλκοόλ στο αίμα ενός ενήλικα, αν πει 2 μύρες 330 ml (5% αλκοόλ) και η μέτρηση γίνει αμέσως μετά, και ποια θα είναι μετά από 2 ώρες.

β) Ένας ενήλικας πίνει δυο ποτήρια κρασί (12% αλκοόλ), 150 ml το καθένα. Μετά από πόσες ώρες η συγκέντρωση αλκοόλ θα φτάσει στο 0;

γ) Δίνονται τα όρια BAC για την Ελλάδα:

BAC	Κατάσταση
0,00	Απόλυτη νηφαλιότητα, ασφαλής οδήγηση
Μέχρι 0,050	Επιτρεπόμενο όριο για οδήγηση σε πολλές χώρες (και για την Ελλάδα)
0,050 – 0,080	Απαγορεύεται η οδήγηση, αλλά οι ποινές είναι πιο ήπιες (π.χ. πρόστιμο)
> 0,080	Απαγορεύεται η οδήγηση, ποινικό αδίκημα – σοβαρές κυρώσεις (πρόστιμο, αφαίρεση διπλώματος, ακόμα και φυλάκιση)
> 0,100	Εξαιρετικά επικίνδυνο – η οδήγηση είναι απολύτως απαγορευμένη, η ικανότητα οδήγησης έχει μειωθεί δραματικά.

i. Αν ένας ενήλικας σε μια νυχτερινή έξοδό του πει ούισκι (40% αλκοόλ), να βρείτε ποια είναι η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να καταναλώσει αν θέλει να οδηγήσει μετά από μία ώρα.

ii. Σε μια παρέα 3 φίλων ο Ανδρέας ήπια 3 μύρες των 250 ml (5% αλκοόλ), ο Βασίλης ήπια ένα μπουκάλι των 500 ml κρασί (12% αλκοόλ) και η Γεωργία δεν ήπια κανένα αλκοολούχο ποτό, ώστε να οδηγήσει με ασφάλεια στον γυρισμό. Ωστόσο, η Γεωργία είπε ότι αν κατανάλωνε 2 ποτήρια ούισκι των 80ml (40% αλκοόλ), μετά από δύο ώρες θα είχε χαμηλότερη συγκέντρωση από τους άλλους δύο και θα μπορούσε να οδηγήσει εκείνη. Συμφωνείτε με τη Γεωργία; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Δίνονται: $\frac{33}{730} = 0,045$, $\frac{36}{730} = 0,049$, $\frac{38}{730} = 0,052$, $\frac{40}{730} = 0,065$, $\frac{60}{730} = 0,082$, $\frac{64}{730} = 0,087$.

38871. Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι σε μια κατακόρυφη βολή προς τα πάνω η σχέση που συνδέει το ύψος (την απόσταση στην οποία φτάνει το βλήμα από το έδαφος) h σε m, την επιτάχυνση της βαρύτητας g

σε m/s^2 , την αρχική ταχύτητα v_0 σε m/s^2 και τον χρόνο t σε sec είναι η $h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$. Επίσης,

γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του βλήματος v σε χρόνο t από την αρχή της κίνησης είναι $v = v_0 - gt$.

Σε ένα πείραμα για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη, ένα βλήμα βάλλεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10m/s$. Από τα δεδομένα του πειράματος γίνεται γνωστό ότι το βλήμα χρειάζεται $t = 5,4$ sec, για να επιστρέψει στο επίπεδο από όπου ξεκίνησε (σημείο με μηδενικό ύψος). Στον Άρη η ατμόσφαιρα είναι εξαιρετικά αραιή και για αυτόν τον λόγο η αντίσταση θεωρείται αμελητέα.

α) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πειράματος, να βρείτε ποια είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στον πλανήτη Άρη.

β) i. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι η τροχιά του βλήματος είναι συμμετρική (χρόνος ανόδου = χρόνος καθόδου), ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο θα φτάσει όταν βρίσκεται στον πλανήτη Άρη;

ii. Να συγκρίνετε αυτό το ύψος με το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο θα μπορούσε να φτάσει, αν το ίδιο βλήμα έκανε την ίδια ακριβώς κίνηση στη Γη, που έχει επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ (θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα).

γ) Η Αλεξάνδρα λέει στον συμμαθητή της τον Μάριο: «Αν έχουμε ένα drone στον Άρη, θα "ζυγίζει" 3 φορές λιγότερο, άρα είναι πιο εύκολο να απογειωθεί». Συμφωνείτε με την Αλεξάνδρα; Να εξηγήσετε την σκέψη σας.

Δίνεται τύπος υπολογισμού βάρους: $W = m \cdot g$, όπου m η μάζα του σώματος.

38874. Σε ένα γραπτό τεστ γνώσεων η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 και η ελάχιστη είναι 0. Το τεστ αποτελείται από 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, καθεμία από τις οποίες έχει μοναδική σωστή απάντηση. Το τεστ βαθμολογείται ως εξής: κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε 5 μονάδες και υπάρχει

«αρνητική βαθμολογία» 0,5 μονάδα, δηλαδή αφαιρείται 0,5 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Επίσης, αν σε κάποια ερώτηση δεν δοθεί καμία απάντηση, αυτή δεν βαθμολογείται. Πλήρως απαντημένο θεωρείται ένα τεστ, του οποίου έχουν απαντηθεί όλες οι ερωτήσεις, είτε σωστά είτε λανθασμένα.

α) Πόσους βαθμούς θα πάρει ένα πλήρως απαντημένο τεστ με δύο σωστές απαντήσεις;

β) i. Ένα πλήρως απαντημένο τεστ πήρε 0. Να αποδείξετε ότι είχε το πολύ μία σωστή απάντηση.

ii. Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός πλήρως απαντημένου τεστ, με περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, είναι $5,5x - 10$, όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

iii. Ένα τεστ βαθμολογήθηκε με 84. Ήταν το τεστ πλήρως απαντημένο; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

38875. Σε ένα τηλεπαιχνίδι ερωτήσεων κάθε παίκτης ή παίκτρια απαντάει ερωτήσεις τη μία μετά την άλλη και συγκεντρώνει βαθμούς. Σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού:

- Κερδίζει 10 βαθμούς για κάθε σωστή απάντηση
- Χάνει 3 βαθμούς για κάθε λανθασμένη απάντηση.
- Αν δεν απαντήσει καθόλου σε κάποια ερώτηση, δεν κερδίζει ούτε χάνει βαθμούς.
- Σταματάει να παίζει και χάνει, όταν η βαθμολογία του γίνει αρνητική.
- Ο μέγιστος αριθμός ερωτήσεων που μπορεί να απαντήσει είναι 30.

α) Μια παίκτρια έχει απαντήσει μέχρι στιγμής σε 5 ερωτήσεις, σωστά σε 3 και λάθος σε 2.

i. Ποια είναι η μεγαλύτερη βαθμολογία στην οποία μπορεί φτάσει μέχρι το τέλος;

ii. Αν απαντήσει σωστά σε x ακόμα ερωτήσεις και λάθος στις υπόλοιπες, χωρίς να χάσει, να αποδείξετε ότι η τελική βαθμολογία της δίνεται από τη σχέση: $13x - 51$.

iii. Αν απαντήσει σε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις είτε σωστά είτε λάθος, χωρίς να χάσει, να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να πάρει λιγότερο από 1 βαθμό.

β) Ένας παίκτης σκέφτηκε να ακολουθήσει μία από τις δύο στρατηγικές:

- 1^η στρατηγική: Να απαντάει μόνο τις ερωτήσεις των οποίων γνωρίζει με βεβαιότητα τις σωστές απαντήσεις.
- 2^η στρατηγική: Να απαντάει όλες τις ερωτήσεις ανεξάρτητα από το αν γνωρίζει τις σωστές απαντήσεις ή όχι.

Τελικά επέλεξε στρατηγική και απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις του παιχνιδιού, χωρίς να χάσει.

i. Σύμφωνα με τη δεύτερη στρατηγική: Αν σ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων για τις οποίες ήταν σίγουρος και πράγματι απάντησε σωστά και x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων που έδωσε χωρίς να είναι σίγουρος, να αποδείξετε ότι η βαθμολογία του δίνεται από τον τύπο $13x + 13\sigma - 90$ με $0 \leq x \leq 30 - \sigma$.

ii. Αν γνώριζε τις σωστές απαντήσεις σε 4 από τις 30 ερωτήσεις και ακολούθησε τη δεύτερη στρατηγική, σε πόσες από τις τυχαία απαντημένες ερωτήσεις θα πρέπει να πέτυχε τη σωστή απάντηση, ώστε να θεωρήσουμε επιτυχή την επιλογή στρατηγικής;

38877. Στο χάντμπολ κάθε ομάδα μπορεί να πετύχει 1 γκολ σε κάθε επίθεση και ένας αγώνας μπορεί να λήξει ισόπαλος, όπως στο ποδόσφαιρο. Η ομάδα χάντμπολ Αιακός στην προπόνηση εξασκείται στο σύστημα επίθεσης «κόντρα από ένα», με το οποίο, αν πετύχει, βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ της ομάδας. α) Ο Αιακός δίνει αγώνα με την ομάδα Πέλοπας. Οκτώ λεπτά πριν από τη λήξη του αγώνα βρίσκεται πίσω από τον Πέλοπα με 22-18. Ο προπονητής του Αιακού σκέφτεται να ζητήσει από τους παίκτες του την εφαρμογή της «κόντρας από ένα» σε όλες τις επιθέσεις που μένουν μέχρι το τέλος του αγώνα.

Από τα στατιστικά των προηγούμενων αγώνων έχει προκύψει ότι:

- Στο 50% των επιθέσεων πετυχαίνει το συγκεκριμένο σύστημα και ο δεξιός σουτέρ βρίσκεται σε θέση για γκολ.
- Στο 80% των περιπτώσεων που βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ, ο Αιακός πετυχαίνει γκολ. Τις υπόλοιπες το χάνει.

i. Να αποδείξετε ότι στα $\frac{2}{5}$ συνόλου των επιθέσεων του Αιακού με το σύστημα «κόντρα από ένα», ο δεξιός σουτέρ πετυχαίνει γκολ.

ii. Αν μέχρι το τέλος του αγώνα ο Αιακός κάνει ακόμα 10 επιθέσεις, τότε, βάσει των στατιστικών, σε πόσες από αυτές εκτιμάτε ότι θα βρεθεί σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ και πόσα γκολ θα πετύχει ο Αιακός;

iii. Μπορεί ο Αιακός να πετύχει νίκη σε αυτό τον αγώνα, κάνοντας 10 επιθέσεις με το σύστημα «κόντρα από ένα»;

β) Την επόμενη αγωνιστική περίοδο, με σκληρή προπόνηση, ο Αιακός κατάφερε να βελτιώσει τα στατιστικά του, στο «κόντρα από ένα»:

- Στο 80% των περιπτώσεων πετυχαίνει το συγκεκριμένο σύστημα και ο δεξιός σουτέρ βρίσκεται σε θέση για γκολ.
- Στο 90% των περιπτώσεων που βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ, ο Αιακός πετυχαίνει γκολ. Τις υπόλοιπες το χάνει.

Αν βρεθεί πάλι να χάνει με 4 γκολ 8 λεπτά πριν από τη λήξη ενός αγώνα, σε πόσες επιθέσεις μπορεί να ανατρέψει το αποτέλεσμα με το «κόντρα από ένα», αν δεν δεχτεί άλλο γκολ;

38927. Το ενεχυροδανειστήριο είναι γραφείο, το οποίο, κυρίως, είτε χορηγεί έντοκα δάνεια που εξασφαλίζονται με ενέχυρο πολύτιμα αντικείμενα (δηλαδή κατακρατά πολύτιμα αντικείμενα μέχρι την αποπληρωμή του δανείου, οπότε τα επιστρέφει) είτε αγοράζει τέτοια αντικείμενα. Τα κοσμήματα είναι ανάμεσα στα αντικείμενα που ενδιαφέρουν ένα ενεχυροδανειστήριο. Τα κύρια κριτήρια για την εκτίμηση της αξίας ενός χρυσού κοσμήματος είναι η καθαρότητα του χρυσού και το βάρος του κοσμήματος.

α) Η καθαρότητα του χρυσού μετριέται σε καράτια, που δείχνουν τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα μετάλλων από το οποίο φτιάχνουμε ένα χρυσό κόσμημα. Για παράδειγμα,

σε ένα χρυσό κόσμημα 24 καρατίων, τα $\frac{24}{24}$ ή αλλιώς το 100% είναι καθαρός χρυσός. Να βρείτε το

ποσοστό του καθαρού χρυσού σε ένα χρυσό κόσμημα 18 καρατίων, σε ένα 14 καρατίων και σε ένα 9 καρατίων.

β) Το ενεχυροδανειστήριο «Golden Market» προσφέρει δάνειο, με ενέχυρο χρυσά κοσμήματα. Το δάνειο είναι ίσο με το μισό της αξίας των κοσμημάτων με ετήσιο επιτόκιο 6%, ενώ τα έξοδα φύλαξης είναι 100 ευρώ και τα έξοδα φακέλου 80 ευρώ. Η Ρέα έχει χρυσά κοσμήματα αξίας 5.000 ευρώ και τα αφήνει ως ενέχυρο για δάνειο ενός μήνα. Τι ποσό θα πρέπει να επιστρέψει η Ρέα στο «Golden Market» στο τέλος του μήνα;

γ) Το «Golden Market» αγοράζει κοσμήματα με την τρέχουσα τιμή χρυσού, αφαιρώντας (για τόκους και προμήθειες) 24% από την τιμή αγοράς. Η τρέχουσα τιμή χρυσού ανά γραμμάριο ενός κοσμήματος καθορίζεται με βάση το ποσοστό του χρυσού στο κόσμημα: για ένα κόσμημα 9 καρατίων είναι 35 ευρώ/γραμμάριο και για ένα κόσμημα 14 καρατίων είναι 55 ευρώ/γραμμάριο. Η Αθηνά μπορεί να διαθέσει στο ενεχυροδανειστήριο ένα κόσμημα 9 καρατίων ή ένα κόσμημα 14 καρατίων, προκειμένου να πάρει από την πώληση τουλάχιστον 2.660 ευρώ. Πόσο πρέπει να ζυγίζει το κάθε κόσμημα, για να πάρει η Αθηνά το ποσό που χρειάζεται διαθέτοντας μόνο ένα από αυτά;

Ανισώσεις με απόλυτα

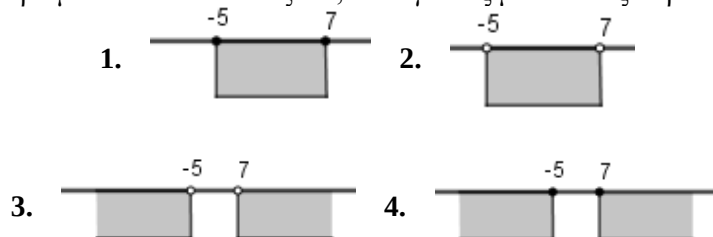
Θέμα 2ο

13025.α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

14295. α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

14319. Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5)$$

34148. α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ **ii)** $|2x - 3| \geq 1$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

34149. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

35296. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

36886.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$.

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

36893.α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$.

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

36895.α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37191.α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1 - 2x| < 5$ **ii.** $|1 - 2x| \geq 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

4^ο Θέμα

13474. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| \leq \sqrt{3}$ (1) και $3 - \frac{x+4}{2} < 0$ (2)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός

$\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

14650. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1) .

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$.

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$.

δ) Να βρείτε τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33893.α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x - 4 > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

38847. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν ηλεκτρικά μέρη συσκευών, όπως οι αντιστάτες και οι πυκνωτές, περιγράφεται από τιμές (αντίσταση, χωρητικότητα κ.λπ.) που αναφέρονται από τον κατασκευαστή, δηλαδή το εργοστάσιο. Στην πράξη, όμως, οι τιμές αυτές μπορεί να διαφέρουν, λόγω μικροδιαφορών κατά την κατασκευή. **α)** Ένας κατασκευαστής, που παράγει ένα είδος αντιστάτη, καθορίζει την τιμή της αντίστασής του στα 680Ω (Ohm) και εγγυάται ότι οι οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις στην κατασκευή δεν υπερβαίνουν το 5% της τιμής αυτής.

i. Αν R είναι η πραγματική τιμή της αντίστασης του συγκεκριμένου αντιστάτη, να αιτιολογήσετε ότι η σχέση που αποδίδει μαθηματικά την παραπάνω κατάσταση είναι $d(R, 680) \leq 34$ ή αλλιώς $|R - 680| \leq 34$.

ii. Μπορεί η πραγματική τιμή R της αντίστασης του συγκεκριμένου αντιστάτη να είναι 715Ω ;

Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση του ερωτήματος (i) ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο, για να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη πραγματική τιμή R της αντίστασης αυτού του αντιστάτη.

β) Ο ίδιος κατασκευαστής, ύστερα από μια αλλαγή στον τρόπο παραγωγής, παρατηρεί ότι οι πραγματικές τιμές των αντιστάτων που τώρα παράγει κυμαίνονται μεταξύ 650Ω και 670Ω . Έτσι χρειάζεται να καθορίσει νέα τιμή για την αντίσταση αυτού του είδους αντιστάτη.

i. Να προτείνετε μία νέα τιμή που ο κατασκευαστής μπορεί να καθορίσει για την αντίσταση του συγκεκριμένου αντιστάτη.

ii. Με βάση την τιμή που προτείνετε, να βρείτε το ποσοστό της τιμής για το οποίο ο κατασκευαστής μπορεί να εγγυηθεί ότι οι οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις δεν θα υπερβαίνουν αυτό το ποσοστό.

38864. Μια εταιρεία κατασκευάζει μετρητές αποστάσεων με χρήση Laser. Για να ξεκινήσει την παραγωγή ενός νέου μετρητή, πρέπει το σφάλμα μέτρησης $|x - x_a|$, όπου x_a είναι η πραγματική απόσταση και x το αποτέλεσμα της μέτρησης με τη νέα συσκευή, να είναι το πολύ μέχρι το 1% της πραγματικής απόστασης x_a .

α) Αν στις δοκιμές που έκανε η εταιρεία, η πραγματική απόσταση ήταν $x_a = 200\text{m}$, ποιες τιμές της μέτρησης x είναι αποδεκτές;

β) i. Να δείξετε ότι γενικότερα οι τιμές x της μέτρησης με τον μετρητή μπορεί να είναι από $0,99x_a$ μέχρι και $1,01x_a$, δηλαδή ότι ισχύει $0,99x_a \leq x \leq 1,01x_a$.

ii. Να αποδείξετε ότι δύο μετρήσεις της ίδιας πραγματικής απόστασης x_a μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους το πολύ κατά $0,02x_a$.

iii. Μέχρι ποια απόσταση x_a οι διάφορες μετρήσεις x που μπορεί να δώσει ο μετρητής για αυτή, δεν μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους περισσότερο από $0,5\text{ m}$;

γ) Αν η τιμή που δίνει ο μετρητής είναι $x = 150\text{m}$, ποιες είναι οι πιθανές τιμές x_a της πραγματικής απόστασης;

(Δίνεται ότι $\frac{150}{1,01} \approx 148,51$ και $\frac{150}{0,99} \approx 151,51$)

38920. Ένας μηχανικός έχει αναλάβει να σχεδιάσει μια υπόγεια δεξαμενή αποθήκευσης νερού σε ορθογώνιο σχήμα. Η δεξαμενή πρέπει να πληροί συγκεκριμένες τεχνικές και φυσικές προδιαγραφές για λόγους ασφαλείας, λειτουργικότητας και περιβαλλοντικής προστασίας. Η χωρητικότητα της δεξαμενής δίνεται από τον τύπο

$V = L \cdot W \cdot H$, όπου L είναι το μήκος, W το πλάτος και H το βάθος της δεξαμενής. Για λόγους σχετικών με την πίεση ο μηχανικός θέλει το ιδανικό βάθος H της δεξαμενής να είναι 3 μέτρα και να ικανοποιεί ταυτόχρονα και την εξής σχέση: $|H - 3| \leq 1$.

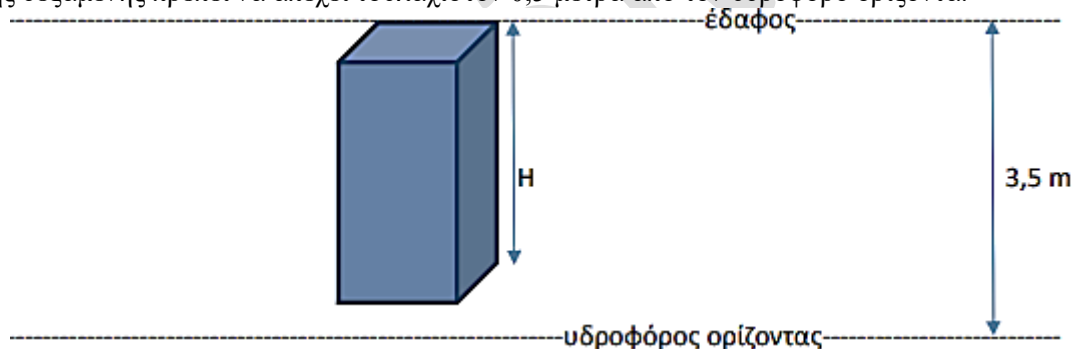
α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη:

1. Το ιδανικό βάθος της δεξαμενής μπορεί να είναι 3 μέτρα, αλλά επιτρέπεται και μία απόκλιση ± 1 μέτρο.
2. Το βάθος της δεξαμενής δεν μπορεί να είναι περισσότερο από 4 μέτρα. 3
3. Το βάθος της δεξαμενής μπορεί να είναι από 1 έως 3 μέτρα.
4. Το βάθος της δεξαμενής δεν μπορεί να διαφέρει από το ιδανικό βάθος 3 μέτρων περισσότερο από 1 μέτρο.

β) Ποιο είναι το διάστημα τιμών τις οποίες μπορεί να πάρει το βάθος της δεξαμενής H σύμφωνα με την παραπάνω σχέση;

γ) Ο μηχανικός δεν θέλει, επίσης, το βάθος της δεξαμενής να φτάσει πολύ κοντά στον υδροφόρο ορίζοντα που

βρίσκεται στα 3,5 μέτρα βάθος, ώστε να αποφύγει την εισροή νερού, την καταστροφή του έργου ή τη ρύπανση του υπόγειου νερού. (Ο υδροφόρος ορίζοντας είναι το υπόγειο επίπεδο στο οποίο το έδαφος είναι πλήρως κορεσμένο με νερό.) Γι' αυτό, για το βάθος H της δεξαμενής, υπάρχει ο περιορισμός ότι το κάτω μέρος της δεξαμενής πρέπει να απέχει τουλάχιστον 0,5 μέτρα από τον υδροφόρο ορίζοντα.



Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του βάθους H της δεξαμενής που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη;

δ) Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του βάθους H της δεξαμενής, οι οποίες ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο παραπάνω συνθήκες που θέτει ο μηχανικός.

ε) Αν για τις διαστάσεις L , H και W ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί: $4 \leq L \leq 6$, $2 \leq H \leq 3$ και $6 \leq W \leq 7$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της χωρητικότητας της δεξαμενής;

Θέμα 3ο

14601. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1 , x , x^2 .

14753. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παράσταση

$A = |2x - 3| - |4 - 3x|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Θέμα 2ο

14474. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

35382. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

37169. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

Θέμα 2ο

12722. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x) < 0$.

12976. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

13321. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

14189. α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

34162. α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 5| \leq 3$ (1).

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$ (2).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

34919. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1).

β) Αν $3 < x < 7$ να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

35030. α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$.

35035. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α).
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

36887. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

36892. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37168. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

37182.α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

38203.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 25 = 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 36 \leq 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

Θέμα 4ο

13174. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B;

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$.

13176. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

γ) i) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

- ii) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

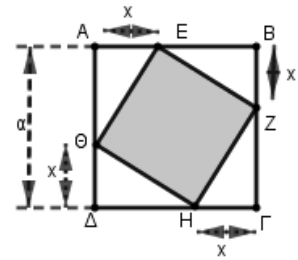
13368. Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου ΕΖΗΘ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α) Αν η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι a και η απόσταση των κορυφών του ΕΖΗΘ από τις αντίστοιχες κορυφές του ΑΒΓΔ είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ δίνεται από τη σχέση:

$$(ΕΖΗΘ) = x^2 + (a - x)^2 \quad \text{με } 0 \leq x \leq a.$$

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού ΑΒΓΔ.

γ) Να βρείτε την πλευρά a του τετραγώνου ΑΒΓΔ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του ΑΒΓΔ, δηλαδή: $(ΕΖΗΘ) = \frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)$. (Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$).



14123. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - ax - (a + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

β) Αν είναι $a > -2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $a + 1$.

ii. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - ax - (a + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.

iii. Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{a}{2}\right)$.

14615. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$.

14652. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $a > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, a, a^2, \sqrt{a}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $a, a^2, \frac{a + a^2}{2}$.

14653. Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιο του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

14654. α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

ii) Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

14924. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$ να δείξετε ότι $\alpha \in (-1, 1)$.

14963. Δίνεται η εξίσωση $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

32682.α) i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x .

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

33587. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f για τις διάφορες τιμές του x .

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2,999) \cdot f(-1,002)$.

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

33711. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β) Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $k^2 - 2k - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33712. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$.

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

33698. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33890.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1)

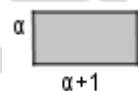
β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ . ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

33892. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$

γ) Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές a και $a + 1$ όπου ο αριθμός a ικανοποιεί τη σχέση $\left|a - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει



$E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < a < 2$

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

34319. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί

αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34323. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$

34325. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$0 < d(x_1, x_2) < 2$.

34185.α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34186. Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ .

β) Να δείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0, 2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

36658. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

36669. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

36670. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

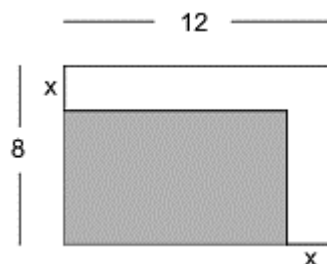
36678. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: 0, 1, α , α^2 , $\sqrt{\alpha}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

38822. Ένας μαραγκός θέλει να αφαιρέσει ένα μέρος σχήματος «Γ» από ένα ορθογώνιο κομμάτι ξύλου διαστάσεων 8 επί 12dm, για να κατασκευάσει μια ντουλάπα. Το μέρος που θα κρατήσει, για να χρησιμοποιήσει, είναι επίσης ορθογώνιο, μικρότερο του αρχικού, όπως είναι το σκιασμένο μέρος του παρακάτω σχήματος.



α) Αν x είναι το πλάτος του «Γ» που θα κόψει ο μαραγκός, να αποδείξετε ότι η παράσταση $x^2 - 20x + 96$ εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα κρατήσει, για να χρησιμοποιήσει.

β) Ο μαραγκός θέλει από το αρχικό κομμάτι ξύλου να κόψει και να χρησιμοποιήσει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 45 dm^2 .

i. Πόσο είναι το πλάτος x του «Γ» που πρέπει να κόψει;

ii. Ο μαραγκός από την εμπειρία του έχει διαπιστώσει ότι, για να μπορεί να διορθώνει λάθη κατά την εργασία του, το κομμάτι ξύλου που κόβει πρέπει να έχει τουλάχιστον 2% μεγαλύτερο εμβαδό από αυτό της τελικής κατασκευής. Να γράψετε μια ανίσωση που η λύση της να δίνει το πλάτος x του «Γ» για αυτή την περίπτωση.

iii. Αν ο μαραγκός κόψει το «Γ» με πλάτος $2,9 \text{ dm}$, τότε θα μπορεί να διορθώσει λάθη, όπως περιγράφεται στο υποερώτημα ii;

38825. Οι ερευνητές στο πεδίο της ασφάλειας τροφίμων αναπτύσσουν μαθηματικά μοντέλα που προβλέπουν την ανάπτυξη βακτηρίων στις τροφές. Τα μοντέλα αυτά βοηθούν τους Εθνικούς Οργανισμούς Υγείας να εκδώσουν οδηγίες προς τους καταναλωτές αναφορικά με την ασφαλή διαχείριση και συντήρηση των τροφών.

α) Βρέθηκε ότι ο αριθμός N των βακτηρίων ενός συγκεκριμένου είδους που αναπτύσσεται σε μία τροφή μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο: $N = -T^2 + 72T - 396$,

όπου T είναι η θερμοκρασία της τροφής σε βαθμούς Κελσίου για την οποία ο αριθμός N των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το μηδέν. Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία της τροφής για την οποία ο αριθμός των βακτηρίων που αναπτύσσεται σε αυτή είναι αμελητέος, θεωρώντας τον ίσο με το μηδέν.

β) Για μια διαφορετική τροφή, ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηρίων σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία της τροφής βρέθηκε ότι είναι ο εξής: $N = -(T - 2)(T - 57)$.

Να βρείτε το εύρος των τιμών της θερμοκρασίας για τις οποίες αναπτύσσονται βακτήρια στην τροφή αυτή.

γ) Να βρείτε το εύρος των τιμών της θερμοκρασίας για τις οποίες, αν αποθηκεύσουμε μαζί τις τροφές που αναφέρονται στα α) και β), αναπτύσσονται μικρόβια και στις δύο τροφές.

38859. Ένας επιχειρηματίας θέλει να επενδύσει στη διαμόρφωση ενός εξωτερικού χώρου για τη διοργάνωση δεξιώσεων. Στο κέντρο του χώρου σχεδιάζει να υπάρχει πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 12 m και πλάτος 6 m . Περιμετρικά της πισίνας θα διαμορφωθεί χώρος σταθερού πλάτους $x \text{ m}$, στον οποίο θα τοποθετήσει τραπέζια.

α) i. Να αποδείξετε ότι η επιφάνεια E του χώρου περιμετρικά της πισίνας δίνεται από τη σχέση $E = 4x^2 - 36x \text{ m}^2$.

ii. Για να μην έχει ζημιά ο επιχειρηματίας πρέπει να μπορεί να τοποθετήσει τουλάχιστον 20 τραπέζια. Αν για κάθε τραπέζι απαιτείται χώρος 10 m^2 , να βρείτε για ποιες τιμές του πλάτους x ο επιχειρηματίας μπορεί να τοποθετήσει αρκετά τραπέζια.

β) Προκειμένου να διαμορφώσει κατάλληλα τον χώρο, ο επιχειρηματίας μπορεί να διαθέσει μέχρι 10.000 € για την κατασκευή της περίφραξης.

i. Να αποδείξετε ότι το μήκος Π της περίφραξης δίνεται από τη σχέση $\Pi = 8x + 36 \text{ m}$.

ii. Αν η κατασκευή της περίφραξης κοστίζει 100 € το μέτρο, να βρείτε τις τιμές του πλάτους x , για τις οποίες

επαρκούν τα 10.000 € που διαθέτει ο επιχειρηματίας για την κατασκευή της.

γ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα α) και β), να υπολογίσετε τις τιμές του πλάτους x για τις οποίες είναι δυνατόν, αλλά και συμφέρει, να πραγματοποιηθεί η επένδυση.

(Δίνεται ότι $\sqrt{281} \approx 16,8$)



Θέμα 3ο

34910. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).

β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις

της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

Πρόοδοι

Ακολουθίες

Θέμα 4ο

13056. Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

•	• •	• •• ••	• •• ••• •••	...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον

$$\text{τύπο } T_v = \frac{v(v+1)}{2}, v \in \mathbb{N}^*.$$

α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος

Θέμα 2ο

14259. Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_v) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $a_1 = 2$ και $a_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$.

14476. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_v) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ...

α) i) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

14512. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:

i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (a_v) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω .

ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (a_v) .

14573. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_v) για την οποία ισχύει: $a_4 - a_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

14574. Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_v) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

14597. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;

14656. Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_v) δίνονται $a_1 = 41$ και $a_6 = 26$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .
β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο v , ώστε $\alpha_v = v$.

34145. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

- α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.
β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

34147. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.
β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34153. Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

- α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.
β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

34158. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.
(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

34871. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $x + 1$, $3x + 2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

34877. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

35046. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.
β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

35143. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.
β) Να αποδείξετε ότι ο v -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_v = 2v - 4$, $v \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

35299. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

- α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της v -οστής σειράς.
β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

35375. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.
β) Να βρείτε τον α_{20} .
γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

35408. Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε τη τιμή του x .

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

36897. α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$.

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45.

Θέμα 4ο

12694. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

12764. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω .

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθημένους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

12945. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$, $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της (α_n) είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n .

13089. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όρος αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_n = \beta_{8-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$.

13171. Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = S_n = 2n^2 + 3n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq 1.$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

β) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1, n \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 4n + 1, n \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

13173. Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό τύπο $\alpha_n = 10 + 3n$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

14809. Ο Θωδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ».

Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων:

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_n) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

14927. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$ (1).

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

14758. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

14962. Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2, 8]$

υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_n),

- α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (a_n) .
- β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (a_n) που υπάρχουν στο $\Delta = [2, 8]$.
- γ) Αν $a_6 = 14$,
- i. να βρείτε τον a_1 .
- ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (a_n) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.
- (Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

32741. Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

- α) Να βρείτε την τιμή του x .
- β) Να αποδείξετε η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.
- γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε n ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του n , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

33579. Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

- α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .
- β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:
- i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
- ii) Τον πρώτο όρο της προόδου.
- iii) Το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$.

33581. Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3ος όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $a_8 = 23$.

- α) Να βρείτε τον 1° όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου.
- Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 3$,
- β) Να υπολογίσετε τον 31° όρο της προόδου.
- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$

33583. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.

- α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.
- β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) , τέτοιο ώστε να ισχύει:
- $$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}.$$

33858. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.
- β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:
- i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.
- ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

34746. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

36650. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν για κάθε $v \leq 51$ ο αριθμός a_v εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο v -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$)

36653. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (a_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $a_1 = x$, $a_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $a_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε :

α) να αποδειχθεί ότι $x=3$.

β) να βρεθεί ο n -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$.

36660. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το n° όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

ι) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη;

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

36662. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

36674. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15, ... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

37204. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

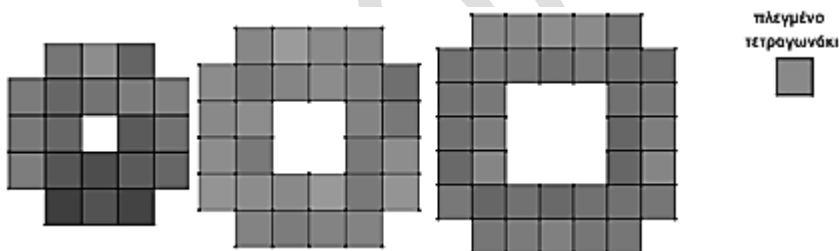
γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

38804. Ο Αντρέας θέλει να φτιάξει μια μάλλινη κουβέρτα ενώνοντας μεταξύ τους πλεχτά σχήματα, όπως αυτά που φαίνονται παρακάτω, και καλύπτοντας τα κενά με ύφασμα. Χρειάζεται να υπολογίσει πόσα τετραγωνάκια θα πλέξει, για να ξέρει πόσα κουβάρια μαλλί πλεξίματος να αγοράσει. Το κάθε κουβάρι είναι 140m μαλλί. Όπως βλέπουμε, σε κάθε ένα από τα σχήματα του παρακάτω σχεδίου υπάρχει μια τετράγωνη «τρύπα» στη μέση. Τα σχήματα στο παρακάτω σχέδιο δεν είναι ίδια, ακολουθούν όμως ένα μοτίβο, δηλαδή στο 1^ο σχήμα η «τρύπα» αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνάκι, στο 2^ο σχήμα η «τρύπα» αντιστοιχεί σε 4 τετραγωνάκια, στο 3^ο σχήμα σε 9, κοκ. Για το κάθε πλεγμένο τετραγωνάκι χρειαζόμαστε 16cm μαλλί.

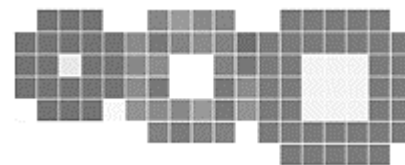


α) i. Από πόσα πλεγμένα τετραγωνάκια αποτελείται το δέκατο σχήμα στη σειρά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η «τρύπα» στη μέση του δέκατου σχήματος σε πόσα τετραγωνάκια αντιστοιχεί; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Από πόσα πλεγμένα τετραγωνάκια αποτελείται το n -οστό σχήμα στη σειρά; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

γ) Ο Αντρέας σκέφτηκε να φτιάξει μια ομάδα σχημάτων του μοτίβου, την οποία θα επαναλαμβάνει για να πλέξει την κουβέρτα. Μια τέτοια ομάδα είναι π.χ. η παρακάτω, όπου φαίνονται τα τρία πρώτα σχήματα. Μια άλλη ομάδα θα μπορούσε να έχει τα τέσσερα πρώτα σχήματα, ή τα πέντε πρώτα κ.ο.κ.



i. Να υπολογίσετε πόσα σχήματα του μοτίβου θα πρέπει να φτιάξει, ώστε τα τετραγωνάκια που θα πλέξει να είναι μεταξύ 500 και 600.

ii. Ο Αντρέας αποφάσισε να φτιάξει τα 10 πρώτα σχήματα του μοτίβου και, για να καλύψει όσο το δυνατόν περισσότερα κενά στη κουβέρτα, αποφάσισε να πλέξει 7 τέτοιες δεκάδες και επιπλέον κάποια μεμονωμένα σχήματα. Πόσα περίπου κουβάρια μαλλί θα πρέπει να αγοράσει, για να φτιάξει την κουβέρτα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνονται: $\sqrt{616} \approx 24,8$ και $\sqrt{516} \approx 22,7$.

38829. Η Μαρία είναι φοιτήτρια και προσπαθεί να οργανώσει το διάβασμά της για τις εξετάσεις του Ιουνίου, στις οποίες πρέπει να δώσει τρία μαθήματα. Έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα, όπου έχει σημειώσει τη σειρά με την οποία δίνει το κάθε μάθημα και τον αριθμό των σελίδων που έχει να διαβάσει για καθένα από αυτά.

Μάθημα	Υψηλ-Αριθμός σελίδων
M1	296 σελ.
M2	274 σελ.
M3	400 σελ.

Ο στόχος της είναι να έχει ολοκληρώσει την ύλη και των τριών μαθημάτων τουλάχιστον δύο μέρες πριν από την έναρξη των εξετάσεων, που είναι στις 15/6. Σκέφτεται λοιπόν να ξεκινήσει διαβάζοντας 20 σελίδες και κάθε επόμενη ημέρα να διαβάζει 5 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη.

α) Πόσες σελίδες θα διαβάσει η Μαρία την 5η μέρα;

β) Θα προλάβει να ολοκληρώσει την ύλη του πρώτου μαθήματος M1 μέσα σε 8 ημέρες, αν έχει ξεκινήσει το διάβασμά της από αυτό το μάθημα; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

γ) Πόσες μέρες θα χρειαστεί η Μαρία, για να διαβάσει όλες τις σελίδες από την ύλη και των τριών μαθημάτων, ακολουθώντας το ρυθμό διαβάσματος που όρισε η ίδια;

$$(\sqrt{1601} \approx 40)$$

δ) Αν η Μαρία διαβάζει τα μαθήματα διαδοχικά με τη σειρά την οποία θα τα δώσει στις εξετάσεις, αφήνοντας το M3 τελευταίο, πόσες ημέρες θα χρειαστεί για να διαβάσει το M3, αφού έχει ολοκληρώσει το M1 και το M2, ακολουθώντας πάντα τον ίδιο ρυθμό διαβάσματος τον οποίο όρισε; Πότε πρέπει να αρχίσει να διαβάζει το M3, ώστε να ολοκληρώσει το διάβασμά της τουλάχιστον δύο μέρες πριν αρχίσουν οι εξετάσεις;

1ο θέμα

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.

iii. Η εξίσωση $x^v = \alpha$, με v περιττό φυσικό και $\alpha < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[v]{\alpha}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ ισχύει $f(5) = 3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$.

Γεωμετρική πρόοδος

Θέμα 2ο

12763. Δίνεται μια πρόοδος a_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η a_n είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να αποδείξετε ότι η a_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

12787. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

13319. Δίνονται οι αριθμοί $1 - x, \frac{x}{2}, 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

14920. Μια γεωμετρική πρόοδος (a_n) έχει πρώτο όρο $a_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{a_3}{a_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

34156. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

34447. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

$6 - x$

34874. α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

35037. Οι αριθμοί $k - 2, 2k$ και $7k + 4, k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $k = 4$ και να βρείτε το λόγο της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .

ii) Να αποδείξετε ότι $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$.

35042. α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x = 5$ και ω είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

35205. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x, 2x+1, 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν: **i)** $x=1$ **ii)** $x=-1$

35411. α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

36891. Σε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με θετικό λόγο, ισχύει: $a_3=1$ και $a_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $a_n = 2^{n-3}$.

Θέμα 4ο

12731. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda, (\kappa > 0, \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

12998. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (a_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

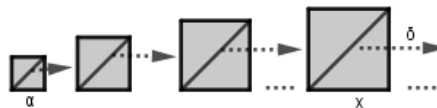
ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

(a_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

14645. Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς a , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $a_n = a^2 2^{n-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά a του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ..

33891. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον

αντίστροφο του λόγου της (α_n) .

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να

αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

34180. Δίνονται οι αριθμοί 2, x , 8 με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x , 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) .

ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να ισχύει:

$$2(S_n + 24) = \beta_7.$$

34181. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α , β και εμβαδόν E . Οι αριθμοί α , E , β με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

β) Αν $E=1$ και $\alpha + \beta = 10$,

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β .

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

36649. Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

36677. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται: Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό α_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii) Να βρείτε το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii) το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv) το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

37205. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας μετά το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

38792. Ένα είδος γρήγορα αναπτυσσόμενων τοξικών φυκιών εμφανίζεται την 1η Απριλίου, σε μια λίμνη ως αποτέλεσμα της προβληματικής διαχείρισης της γύρω περιοχής (κοντινά αγροκτήματα με απόβλητα και ένα εγκαταλελειμμένο ορυχείο υδραργύρου). Τα φύκια εμφανίζονται αρχικά σε μία μικρή ποσότητα α , χωρίς να γίνουν αμέσως αντιληπτά. Αρχίζουν να αναπτύσσονται και να καλύπτουν την επιφάνεια της λίμνης με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μέρα να καλύπτουν τη διπλάσια επιφάνεια από εκείνη που κάλυπταν την προηγούμενη ημέρα. Εάν συνεχίσουν να αναπτύσσονται με αυτόν τον ρυθμό, η επιφάνεια Λ της λίμνης θα καλυφθεί πλήρως στις 30 Απριλίου, θέτοντας σε κίνδυνο όποιον οργανισμό ζει κοντά ή μέσα στη λίμνη.

α) Να γράψετε μία σχέση που να περιγράφει την επιφάνεια Λ_9 της λίμνης που έχει καλυφθεί από τα φύκια στις 9 Απριλίου και μία σχέση που να περιγράφει την επιφάνεια της λίμνης που έχει καλυφθεί από τα φύκια οποιαδήποτε ημέρα n του Απριλίου.

β) Ποιο μέρος της λίμνης έχει καλυφθεί από τα φύκια στις 26 Απριλίου; Να εξηγήσετε πώς καταλήξατε στην απάντησή σας.

γ) Ποια ημέρα τα φύκια θα έχουν καλύψει τη μισή λίμνη; Να εξηγήσετε πώς καταλήξατε στην απάντησή σας.

δ) Στις 29 Απριλίου βιολόγοι φτάνουν στη λίμνη και προσπαθούν να την καθαρίσουν από τα φύκια, όμως δεν καταφέρνουν να τα αφαιρέσουν εντελώς όλα. Εκτιμούν ότι το 0, 5% της συνολικής επιφάνειας της λίμνης παραμένει καλυμμένο με φύκια. Σε πόσες ημέρες θα έχει καλυφθεί πάλι όλη η λίμνη με φύκια μετά από αυτή την παρέμβαση των βιολόγων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

38806. Η Βάσω θα ήθελε να επισκεφθεί την Πάρο την πρώτη εβδομάδα του Ιουλίου. Τα εισιτήρια και το ξενοδοχείο θα στοιχίσουν 285 ευρώ. Αποφάσισε λοιπόν την πρώτη εβδομάδα του Ιανουαρίου να βάλει στην άκρη 5 ευρώ για το ταξίδι, τη δεύτερη εβδομάδα 7 ευρώ, την τρίτη 9 ευρώ κ.ο.κ.

α) Να δείξετε ότι τα χρήματα που εκφράζουν το ποσό που αποταμιεύει η Βάσω κάθε εβδομάδα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) i. Πόσα χρήματα θα μαζέψει σε 1 μήνα;

ii. Να εξετάσετε αν θα έχει μαζέψει έγκαιρα τα χρήματα που χρειάζεται για να πάει στην Πάρο.

γ) Προς το τέλος Ιανουαρίου η Βάσω πρότεινε στη φίλη της την Κατερίνα να κάνουν μαζί αυτό το ταξίδι. Της Κατερίνας της άρεσε η ιδέα, είχε ήδη 30 ευρώ στην άκρη, οπότε άρχισε αμέσως να εξοικονομεί χρήματα, για να συμπληρώσει το ποσό. Τον Φεβρουάριο κατάφερε και έβαλε στην άκρη 4 ευρώ, τον Μάρτιο 10 ευρώ, τον Απρίλιο 25 ευρώ κ.ο.κ. Θα καταφέρει να έχει εγκαίρως το ποσό που χρειάζεται για το ταξίδι;

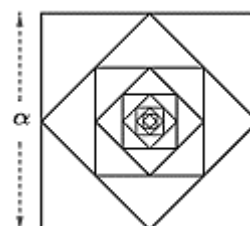
Δίνεται $\sqrt{1156} = 34$ και $5^5 = 3125$.



38831. Ένας καλλιτέχνης ζωγράφισε ένα σπирάλ τετραγώνων, στο οποίο τα μέσα των πλευρών ενός τετραγώνου είναι οι κορυφές του επόμενου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm, να χρησιμοποιήσετε το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσετε την πλευρά του αμέσως μικρότερου τετραγώνου.

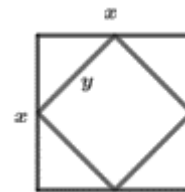
ii. Να αποδείξετε ότι, αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι x και η πλευρά του



αμέσως μικρότερου είναι y , τότε $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

β) Αν η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι α cm, να αποδείξετε ότι τα μήκη των πλευρών των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_v) με γενικό όρο

$$\alpha_v = \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{v-1}.$$



γ) Ο καλλιτέχνης αποφάσισε να ζωγραφίσει 6 διαδοχικά τετράγωνα και η πλευρά του τελευταίου τετραγώνου να είναι μεγαλύτερη από 1 cm, ώστε το σχέδιο να είναι ευκρινές. Επέλεξε το αρχικό τετράγωνο να έχει πλευρά

6 cm. Είναι σωστή η επιλογή του αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

38857. Η Άννα αποφάσισε να ξεκινήσει μια επιχείρηση πώλησης βιολογικού μελιού. Για να διαφημίσει το προϊόν της, χρησιμοποιεί ένα πρόγραμμα προώθησης, κάνοντας έκπτωση σε όποιον πελάτη αγοράσει ένα βάζο μέλι και συστήσει το προϊόν σε δύο φίλους του. Αν στη συνέχεια αυτοί οι δύο συστημένοι φίλοι αγοράσουν και αυτοί μέλι και συστήσουν με τη σειρά τους την επιχείρηση σε άλλους δύο φίλους τους ο καθένας, παίρνουν και αυτοί έκπτωση κ.ο.κ. Αρχικά λοιπόν, στην πρώτη φάση, η Άννα πουλάει το πρώτο της βάζο μελιού σε έναν πελάτη, ο οποίος συστήνει με τη σειρά του την επιχείρηση σε δύο φίλους του, και ευελπιστεί ότι το πρόγραμμα προώθησης που σκέφτηκε θα πετύχει.

α) Η Άννα σκέφτηκε ότι αν πετύχει αυτό το πρόγραμμα προώθησης που έχει σκεφτεί και όλοι οι συστημένοι πελάτες με τη σειρά τους αγοράσουν μέλι, τότε ο αριθμός των συστημένων πελατών που θα αγοράσουν μέλι σε κάθε φάση είναι όροι γεωμετρικής προόδου.

i. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο αυτής της προόδου.

ii. Να υπολογίσετε τον αριθμό των καινούριων πελατών που θα αγοράσουν μέλι στην 7^η φάση αυτής της διαδικασίας, εφόσον πετύχει.

iii. Πόσα βάζα θα έχει πουλήσει συνολικά η Άννα μέχρι και την 7^η φάση αυτής της διαδικασίας προώθησης,

εφόσον όλοι οι πελάτες έχουν ακολουθήσει αυτή τη διαδικασία με επιτυχία;

β) Η Άννα, κάνοντας έναν οικονομικό προϋπολογισμό, σκέφτηκε ότι η παραπάνω προωθητική στρατηγική δεν μπορεί να συνεχιστεί για πάντα, καθώς το μέλι θα αρχίσει να πουλιέται πολύ φθηνά. Έτσι σύμφωνα με τον σχεδιασμό της, πρέπει να φτάσει το πολύ μέχρι 9 φάσεις, ενώ ταυτόχρονα οι συνολικοί πελάτες να είναι λιγότεροι από 500. Μπορεί να επιτευχθεί αυτό το πλάνο της Άννας; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

38860. Ένας μαθητής χρησιμοποίησε ένα γκρι και ένα άσπρο χαρτόνι, για να φτιάξει ένα διακοσμητικό αποτελούμενο από γκρι και άσπρα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα.

Ξεκινώντας από ένα γκρι τρίγωνο με υποτείνουσα 16 cm, τα τοποθέτησε εναλλάξ έτσι, ώστε η κάθετη πλευρά του ενός να είναι η υποτείνουσα του επόμενου. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα πέντε πρώτα από αυτά.

α) Να χρησιμοποιήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, για να υπολογίσετε το μήκος των κάθετων πλευρών του αρχικού γκρι ορθογωνίου τριγώνου.

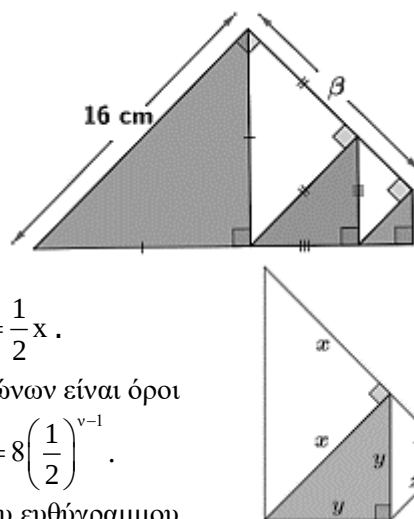
β) i. Αν x , y και z τα μήκη των κάθετων πλευρών τριών διαδοχικών

τριγώνων, όπως φαίνεται στο σχήμα, να αποδείξετε ότι $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ και $z = \frac{1}{2}x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα μήκη των κάθετων πλευρών των άσπρων τριγώνων είναι όροι

γεωμετρικής προόδου (β_v) με πρώτο όρο $\beta_1 = 8$ και γενικό όρο $\beta_v = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^{v-1}$.

γ) Να δείξετε ότι, όσα άσπρα τρίγωνα και να προστεθούν, το μήκος β του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται από τις κάθετες πλευρές τους θα είναι πάντα μικρότερο από την υποτείνουσα του αρχικού γκρι τριγώνου, δηλαδή από 16.



38865. Ο Αντόνιο και η Μπάρμπαρα ξεκινούν να εργάζονται σε διαφορετικές εταιρείες την ίδια μέρα. Ο καθένας έχει ετήσιο μισθό 8.000 ευρώ κατά τον πρώτο χρόνο απασχόλησης. Οι συμβάσεις εργασίας προβλέπουν αύξηση μισθού στην αρχή κάθε επόμενου έτους (δηλαδή στην αρχή του δεύτερου έτους, του τρίτου, κτλ). Ο Αντόνιο πληρώνεται με βάση το σχέδιο Α και η Μπάρμπαρα με βάση το σχέδιο Β.

Σχέδιο Α: Ο ετήσιος μισθός αυξάνεται κατά 450 ευρώ κάθε χρόνο.

Σχέδιο Β: Ο ετήσιος μισθός αυξάνεται κατά 5% κάθε χρόνο.

α) Να υπολογίσετε τον ετήσιο μισθό του Αντόνιο και της Μπάρμπαρα στην αρχή του τρίτου έτους της απασχόλησής τους.

β) Να γράψετε μια αλγεβρική έκφραση για τον ετήσιο μισθό του Αντόνιο και τον αντίστοιχο της Μπάρμπαρα στην αρχή του n -οστού έτους απασχόλησής τους.

γ) Ο Αντόνιο ισχυρίζεται ότι ο ετήσιος μισθός του θα είναι κάθε χρόνο μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της Μπάρμπαρα, αφού από τη συμπλήρωση του πρώτου κιόλας χρόνου θα παίρνει περισσότερα χρήματα από εκείνην. Η Μπάρμπαρα διαφωνεί και του λέει ότι αυτό θα ισχύει μέχρι την συμπλήρωση του 6^{ου} χρόνου. Μόλις ξεκινήσει ο 7^{ος} χρόνος τους στην εταιρεία, ο ετήσιος μισθός της θα είναι μεγαλύτερος. Με ποια από τις δυο τοποθετήσεις συμφωνείτε; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

δ) Εάν τόσο ο Αντόνιο όσο και η Μπάρμπαρα εργαστούν στις ίδιες εταιρείες για συνολικά 15 χρόνια, να βρείτε τη διαφορά των χρημάτων που θα έχουν εισπράξει κατά τη διάρκεια αυτών των 15 ετών.

Δίνεται ότι $1,05^5 \approx 1,28$, $1,05^6 \approx 1,34$, $1,05^{15} \approx 2,08$.

38878. Για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων με υπολογισμούς χρησιμοποιούνται ηλεκτρονικοί υπολογιστές ή δίκτυα υπολογιστών. Αν δημιουργήσουμε ένα δίκτυο υπολογιστών με υπολογιστές γενιάς G, τότε για κάθε επιπλέον υπολογιστή ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση ενός οποιουδήποτε προβλήματος μειώνεται κατά 25% σε σύγκριση με τον χρόνο που χρειαζόταν χωρίς τον επιπλέον υπολογιστή.

α) Για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος με σύνθετους υπολογισμούς έχει εκτιμηθεί ότι ένας υπολογιστής γενιάς G χρειάζεται 20 δευτερόλεπτα. Χρησιμοποιούμε ένα δίκτυο 3 υπολογιστών γενιάς G. Είναι σωστή καθεμία από τις επόμενες προτάσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i. Ο χρόνος που θα χρειαστεί το δίκτυο των 3 υπολογιστών για την επίλυση του προβλήματος είναι μεταξύ 11 και 12 δευτερολέπτων.

ii. Με το δίκτυο των 3 υπολογιστών, ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται κατά $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 20$ δευτερόλεπτα.

iii. Ο χρόνος που χρειάζεται το δίκτυο 3 υπολογιστών για την επίλυση του προβλήματος είναι $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 20$ δευτερόλεπτα.

β) Αν t είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να επιλυθεί ένα σύνθετο πρόβλημα με υπολογισμούς από 1 υπολογιστή γενιάς G, να αποδείξετε ότι ένα δίκτυο n υπολογιστών γενιάς G λύνει το ίδιο πρόβλημα σε

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot t.$$

γ) Ένα σύνθετο πρόβλημα λύνεται με ένα δίκτυο 4 υπολογιστών γενιάς G σε 3 δευτερόλεπτα. Σε πόσο χρόνο θα λυνόταν το ίδιο πρόβλημα με 1 υπολογιστή γενιάς G;

38931. Τα φράκταλ (fractal) είναι γεωμετρικά σχήματα με ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό: παρουσιάζουν αυτοομοιότητα, δηλαδή κάθε μικρό τους τμήμα μοιάζει με το σύνολο. Όσο κι αν μεγεθύνουμε ένα κομμάτι του φράκταλ, θα παρατηρούμε ότι συνεχίζει να εμφανίζει την ίδια δομή. Φράκταλ εμφανίζονται τόσο στη φύση (π.χ. στο μπρόκολο ρομανέσκο), όσο και σε δημιουργήματα του ανθρώπου (όπως έργα τέχνης ή σχήματα κατασκευασμένα με υπολογιστές). Ένα από τα πιο γνωστά φράκταλ είναι το «Τρίγωνο του Sierpinski», το οποίο κατασκευάζεται με την εξής επαναλαμβανόμενη διαδικασία:

1. Ξεκινάμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1.
2. Συνδέουμε τα μέσα των πλευρών του και αφαιρούμε το μεσαίο τρίγωνο που σχηματίζεται.
3. Στα τρία τρίγωνα που απομένουν, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία: εντοπίζουμε τα μέσα των πλευρών και αφαιρούμε το κεντρικό τρίγωνο.
4. Επαναλαμβάνουμε αυτό το μοτίβο επ' άπειρον. Με τον όρο "μαύρα τρίγωνα" εννοούμε εκείνα που

παραμένουν μετά από κάθε αποκοπή και δεν αφαιρούνται.



α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μαύρων τριγώνων στο 1ο, στο 2ο, στο 3ο και στο 4ο σχήμα, να αποδείξετε ότι το πλήθος των μαύρων τριγώνων σε κάθε σχήμα αποτελεί μια γεωμετρική πρόοδο και να γράψετε τον νιοστό της όρο.

β) Να γράψετε το μήκος που έχει η πλευρά καθενός από τα μαύρα τρίγωνα για τα 4 πρώτα σχήματα και να αποδείξετε ότι η πρόοδος που προκύπτει είναι γεωμετρική, γράφοντας το μήκος της πλευράς που θα έχει το νιοστό σχήμα.

γ) Να αποδείξετε ότι τη συνολική περίμετρο των μαύρων τριγώνων (δηλαδή το άθροισμα των περιμέτρων τους) σε κάθε σχήμα τη δίνει ο τύπος : $\Pi_v = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^v$.

δ) Να εξηγήσετε γιατί ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

i. «Το μήκος της πλευράς καθενός από τα μαύρα τρίγωνα μειώνεται, καθώς αυξάνει το πλήθος τους».

ii. «Το άθροισμα των περιμέτρων των μαύρων τριγώνων αυξάνει, καθώς αυξάνει το πλήθος τους».

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης

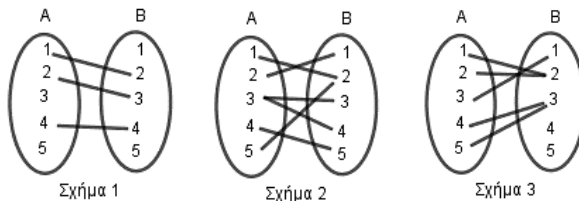
Θέμα 2ο

12765. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$ είναι αυτό δυνατό.

12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

12997. Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της A' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της A' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της A' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

13026. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

13031. Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x=2$, $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

13032. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.

14681. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(3)$ και $f(-3)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

14728. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

14781. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

34446. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

35298. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

35405. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.

37170. Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: $T = 15 + 25 \cdot x$, όταν $0 \leq x \leq 200$.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C .

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37175. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(-5) = f(4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

37185. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

37189. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

37202. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x - 3}$.

Θέμα 4ο

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

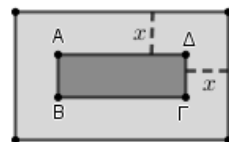
β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του;

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

12911. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x - 1| - |3 - 3x| + |2x - 4|}{2}$.

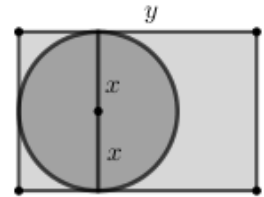
α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$.

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

14122. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm.

Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου

ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι: $y = 5 - 2x$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που

βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση: $E = 10x - (\pi + 4)x^2$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου. **ii.** τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

14375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ .

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

14562. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

14629. Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του

$E(x)$ δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$.

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για

να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

14655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2), x \in (0, 10).$$

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

γ) Αν $x = 5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

14702. Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περιφράξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6ax + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$.

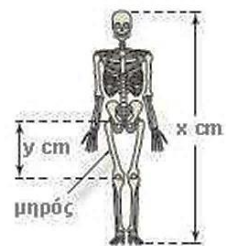
32753. Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$ Άνδρας $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.



33582. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$.

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

33586. Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει τόνερ το μήνα.

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού τόνερ το μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά.

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

33855.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$.

34184. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

34182. Στο επόμενο σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο BD (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).

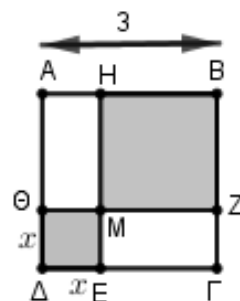
α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta ME\Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι

$E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

γ) Για ποια θέση του M πάνω στη BD το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



34317. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης A καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

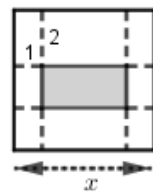
iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη B το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη B , να

αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

35724. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$, $5 \leq x \leq 10$

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

36654. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

36668. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και

της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η: $K = \frac{F-32}{1,8} + 273$.

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

36679. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

36680. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + a$ και $g(x) = ax - 5$, με $a \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του a .

β) Για $a = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x).$$

38852. Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά, που ονομάζονται λειχήνες. Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό. Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται, για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της: $\delta(t) = 7 \cdot \sqrt{t - 12}$, όπου δ η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των χρόνων που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Ποια είναι η διάμετρος που θα έχει μια λειχήνα 16 χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων;

γ) Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και είδε ότι ήταν 35mm.

Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος;

δ) Αν μια λειχήνα διπλασίασε την επιφάνειά της τα τελευταία 6 χρόνια, πριν από πόσα χρόνια δημιουργήθηκε;

Δίνεται ότι η επιφάνεια κύκλου με διάμετρο δ είναι : $E = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4}$.

38853. Το μέσο μήκος βήματος του ανθρώπου (δηλαδή η απόσταση από το ένα πόδι στο άλλο σε ένα βήμα) εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το ύψος, το φύλο, ο τρόπος βαδίσματος και το έδαφος. Μια γενική εκτίμηση για το μήκος βήματος σε έδαφος που είναι περίπου επίπεδο είναι για τις γυναίκες περίπου 0,42 φορές το ύψος του ατόμου, ενώ για τους άνδρες είναι περίπου 0,44 του ύψους του ατόμου.

α) Να υπολογίσετε το μέσο μήκος βήματος:

i. ενός άνδρα ύψους 1,85 m,

ii. μιας γυναίκας ύψους 1,80 m.

β) Να γράψετε:

i. Μια συνάρτηση που να εκφράζει το μέσο μήκος βήματος p μιας γυναίκας ανάλογα με το ύψος της σε m.

ii. Μια συνάρτηση που να δίνει την απόσταση S που έχει διανύσει μια γυναίκα ύψους 1,80m σε σχέση με τον αριθμό β των βημάτων που κάνει.

γ) Να βρείτε το ύψος του άνδρα που έχει μέσο μήκος βήματος όσο το μέσο μήκος βήματος μιας γυναίκας ύψους 1,80m.

δ) Η Μαρία έχει ύψος 1,75m και κάθε μέρα κάνει βόλτα 2km με τον σκύλο της με μήκος βήματος περίπου 0,6m. Η Μαρία κάνει περισσότερα βήματα ή ο σκύλος της; Πόσα περισσότερα και γιατί;

38917. Κάθε χρόνο οι δασικές πυρκαγιές εξαπλώνονται με γρήγορο ρυθμό και καίνε μεγάλες εκτάσεις γης. Για την κατάσβεσή τους χρησιμοποιούνται πυροσβεστικά οχήματα που εκτοξεύουν δέσμες νερού. Ένα πυροσβεστικό όχημα εκτοξεύει δέσμη νερού, της οποίας η τροχιά μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη συνάρτηση

$v(x) = -0,13x^2 + x + 3$, όπου $v(x)$ είναι το ύψος (σε μέτρα m) της δέσμης νερού από το έδαφος, και x (σε x) είναι η οριζόντια απόσταση της δέσμης από το πυροσβεστικό όχημα.

α) i. Σε ποια απόσταση από το πυροσβεστικό όχημα φτάνει το νερό στο έδαφος; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

ii. Αν σε κάποια στιγμή το ύψος του νερού είναι 4 μέτρα, πόσα ακόμα μέτρα θα πρέπει να διανύσει οριζόντια το νερό, ώστε να φτάσει στο έδαφος; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

β) i. Μία φωτιά έχει ξεσπάσει σε πλαγιά, σε ύψος 9 μέτρα από το επίπεδο όπου βρίσκεται το πυροσβεστικό, και εξαπλώνεται προς τα πάνω. Το πυροσβεστικό όχημα μένει στη θέση του και ρυθμίζει την εκτόξευση της δέσμης νερού, ώστε τώρα αυτή να ακολουθεί την τροχιά της συνάρτησης $h(x) = -x^2 + 10x$, για να μπορεί να φτάσει τη φωτιά. Πόσο πρέπει να απέχει οριζόντια το πυροσβεστικό όχημα από τη φωτιά, ώστε η δέσμη νερού που θα εκτοξεύσει να φτάνει τη φωτιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να αποδείξετε ότι το πυροσβεστικό όχημα με τη συγκεκριμένη ρύθμιση της δέσμης νερού δεν μπορεί να φτάσει οποιαδήποτε φωτιά βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο των 25 μέτρων.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{4.800} \approx 69$, $\frac{31}{26} \approx 1,2$)



38855. Η Χριστίνα σκέφτεται να αγοράσει ένα εξοχικό διαμέρισμα, για να το ενοικιάζει σε ταξιδιώτες που επισκέπτονται την περιοχή. Ψάχνοντας στο διαδίκτυο, βρήκε να πωλείται το παρακάτω διαμέρισμα:

Αριθμός δωματίων:	1 τραπεζαρία και σαλόνι 1 υπνοδωμάτιο 1 μπάνιο	 Τιμή: 200.000 ευρώ (€)
Επιφάνεια:	60 τετραγωνικά μέτρα (m ²)	
Θέση πάρκινγκ:	ναι	
Χρόνος διαδρομής μέχρι το κέντρο της πόλης:	10 λεπτά	
Απόσταση από την παραλία:	350 μέτρα (m) σε ευθεία	
Μέση διάρκεια ενοικίασης τα τελευταία 10 χρόνια:	315 ημέρες το χρόνο	

Για να αποφασίσει αν η τιμή πώλησης του διαμερίσματος είναι συμφέρουσα, η Χριστίνα απευθύνθηκε σε έναν ειδικό, ο οποίος παίρνει τις πληροφορίες της αγγελίας και εκτιμά την αξία ενός διαμερίσματος με βάση τα παρακάτω κριτήρια:

Τιμή ανά m ²	Βασική τιμή:	2.500 € ανά m ²			
Κριτήρια που προσθέτουν αξία	Χρόνος διαδρομής μέχρι το κέντρο της πόλης:	Περισσότερο από 15 λεπτά: +0 €	Από 5 έως 15 λεπτά: +10.000 €	Λιγότερο από 5 λεπτά: +20.000 €	
	Απόσταση από την παραλία (σε ευθεία):	Περισσότερο από 2 km: +0 €	Από 1 έως 2 km: +5.000 €	Από 0,5 έως 1 km: +10.000 €	Λιγότερο από 0,5 km: +15.000 €
	Θέση πάρκινγκ:	Όχι: +0 €	Ναι: +35.000 €		

Αν η αξία του διαμερίσματος που υπολόγισε ο ειδικός είναι μεγαλύτερη από την τιμή πώλησης που έχει δοθεί στην αγγελία, η τιμή πώλησης θεωρείται «πολύ καλή» για τον υποψήφιο αγοραστή, δηλαδή για τη Χριστίνα.

α) Να εξηγήσετε γιατί, με βάση τα κριτήρια του ειδικού, η τιμή πώλησης που προτείνεται είναι «πολύ καλή» για τη Χριστίνα.

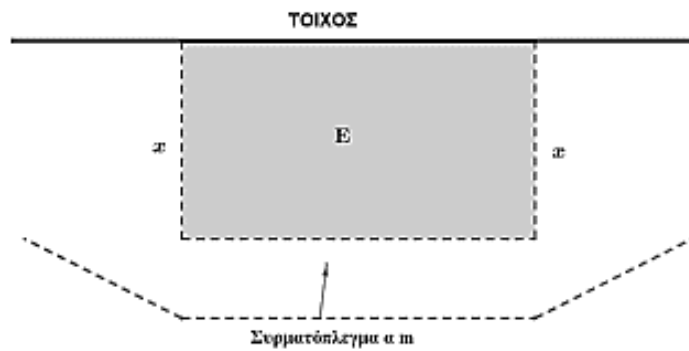
β) Ο ειδικός στις πωλήσεις θέλει να κρατήσει τα χαρακτηριστικά του διαμερίσματος που βρήκε η Χριστίνα (με θέση πάρκινγκ, 10 λεπτά από το κέντρο και 350 m από την παραλία), αλλά όχι μόνο για διαμερίσματα 60 τετραγωνικών. Αν λοιπόν ένα διαμέρισμα είναι x τετραγωνικά, να βρείτε πόσο θα εκτιμήσει την τιμή πώλησης ενός τέτοιου διαμερίσματος ως συνάρτηση του x .

γ) i. Αν υποθέσουμε ότι το διαμέρισμα που σκέφτεται να αγοράσει η Χριστίνα νοικιάζεται σε ταξιδιώτες περίπου 315 μέρες τον χρόνο σε μέση τιμή 100 ευρώ την ημέρα και έχει κόστος συντήρησης και λειτουργίας 8.000 ευρώ τον χρόνο, πόσα χρόνια χρειάζονται, ώστε τα κέρδη να καλύψουν το κόστος αγοράς;

ii. Οι ίδιοι όροι ενοικίασης (315 ημέρες τον χρόνο από 100 ευρώ την ημέρα και κόστος συντήρησης 8.000 ευρώ τον χρόνο) ισχύουν για κάποια διαμερίσματα με εμβαδά από 50 έως και 70 τετραγωνικά μέτρα. Η Αθηνά θέλει να αγοράσει ένα από αυτά τα διαμερίσματα, για να το ενοικιάσει, ώστε να καλύψει το κόστος αγοράς του σε 5 χρόνια. Τα διαμερίσματα έχουν ίδια χαρακτηριστικά με το διαμέρισμα που βρήκε η Χριστίνα (θέση πάρκινγκ, 10 λεπτά από το κέντρο, 350m από την παραλία) και πωλούνται στην τιμή που έχει εκτιμήσει ο ειδικός στο ερώτημα β). Θα μπορούσε η Αθηνά να καλύψει, με τα κέρδη ενοικίασης, το κόστος αγοράς ενός τέτοιου διαμερίσματος σε 5 χρόνια;

38928. Ένας αγρότης αγόρασε a μέτρα συρματοπλέγμα, για να περιφράξει έναν χώρο σχήματος ορθογωνίου.

Η μία πλευρά του ορθογωνίου αποτελείται από έναν τοίχο που ήδη υπάρχει, όπως φαίνεται το σχήμα.



α) Αν το συρματόπλεγμα έχει μήκος $\alpha = 60$ m και το πλάτος του ορθογώνιου χώρου που θέλει να περιφράξει ο αγρότης είναι x m, τότε:

i. Να εκφράσετε το μήκος l της πλευράς που αντιστοιχεί στον τοίχο ως συνάρτηση του x .

Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το μήκος x ;

ii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E του χώρου δίνεται από τη σχέση $E = -2x^2 + 60x$ m².

β) Αν ο αγρότης θέλει το εμβαδόν E του χώρου που θα περιφράξει με το συρματόπλεγμα μήκους $\alpha = 60$ m να είναι τουλάχιστον 400 m², τότε:

i. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το πλάτος x ;

ii. Πόσο μπορεί να είναι το μήκος l της πλευράς που αντιστοιχεί στον τοίχο;

γ) Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα πρέπει να αγοράσει ο αγρότης για να είναι σίγουρος ότι μπορεί να περιφράξει χώρο 800 m²;

38929. Μια εταιρεία, για να κατασκευάσει χαρτόκουτα ανοιχτά από πάνω, χρησιμοποιεί ένα ορθογώνιο χαρτόνι, κόβει στις τέσσερις γωνίες του τετράγωνα πλευράς x dm, και στη συνέχεια διπλώνει τα πλαϊνά μέρη, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν η βάση του κουτιού έχει διαστάσεις 2 dm και 3 dm, να εκφράσετε το εμβαδόν E της επιφάνειας του αρχικού χαρτονιού ως συνάρτηση του ύψους x του κουτιού.

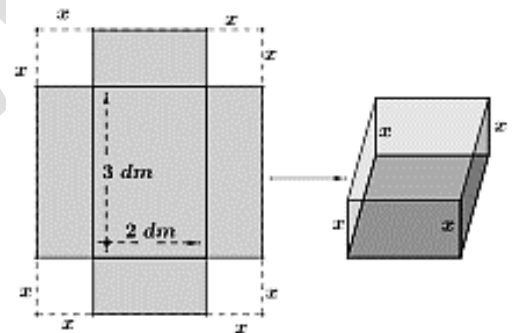
β) Η εταιρεία θέλει να κατασκευάσει κουτιά με χωρητικότητα $V = 12$ dm³.

i. Αν θεωρήσουμε το πάχος του χαρτιού αμελητέο, ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του αρχικού χαρτονιού;

ii. Η εταιρεία διαθέτει ένα μηχάνημα για να μετράει το μήκος x των πλευρών των τετραγώνων που πρέπει να κοπούν στις γωνίες του αρχικού χαρτονιού. Το μηχάνημα έχει ακρίβεια 0,01 dm, δηλαδή το μήκος που μετράει απέχει το πολύ 0,01 dm από το επιθυμητό. Ποιες τιμές μπορεί να έχει η χωρητικότητα των κουτιών που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο;

γ) Η εταιρεία πρέπει να κατασκευάσει κουτιά διαφόρων μεγεθών, όλα όμως πρέπει να έχουν την ίδια βάση διαστάσεων 2×3 dm². Επίσης, το κόστος του χαρτονιού ανά κουτί δεν πρέπει να ξεπερνά τα 2,2 €. Αν το χαρτόνι κοστίζει 0,02 € ανά dm² ποιες μπορεί να είναι οι διαστάσεις του αρχικού χαρτονιού;

(Δίνεται $\sqrt{441} = 21$ και ότι ο όγκος V ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις α , β και γ είναι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$)



Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , ισχύει η ανισότητα: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Συναρτήσεις

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Θέμα 2ο

12680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

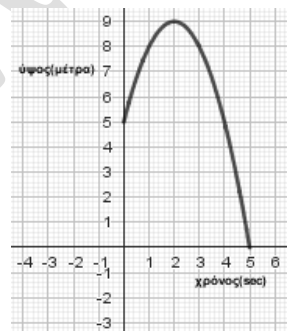
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

12686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

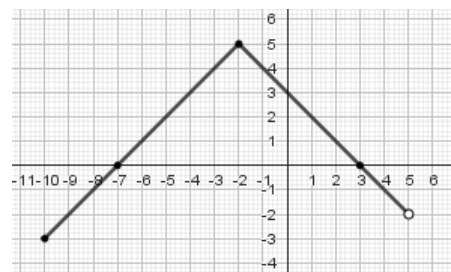
12729. Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;
 β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;
 γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.
 δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.



12910. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.
 β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.
 γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.
 δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.



13322. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+2} + \sqrt{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
 β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$ και $x=2$.
 γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

14072. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
 β) Ανήκει το σημείο $M(1, 3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

14596. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

14603. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

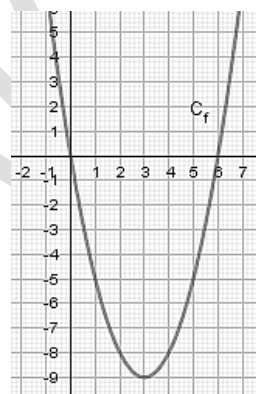
15000. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.



14628. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

35034. Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

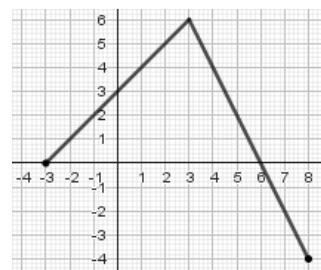
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y				-2	-4	

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.



34159. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

35413. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

36885. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

36889. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

Θέμα 4ο

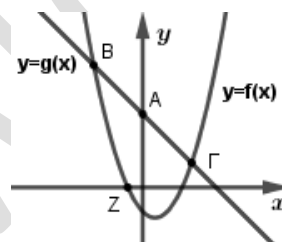
12628. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$

που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$.

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a , η απόσταση των αριθμών $f(a)$ και $-g(a)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.



12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

12941. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

12944. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \neq 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|a| \geq 2$.

12999. Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να

προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

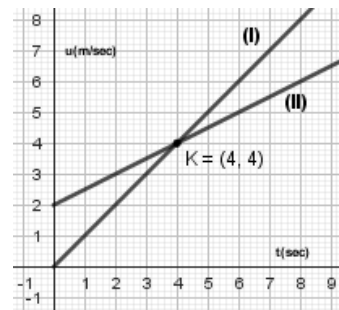
β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.

Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in (3,5)$.

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.



13030. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

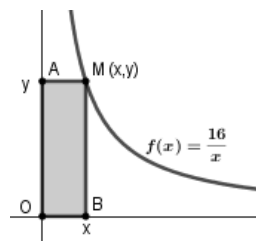
γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

13090. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της

συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους



δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του Μ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ) Αν Μ' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ'Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ' έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ'Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

13120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου Α(4,4) ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

13313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f .

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο A .

13168. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

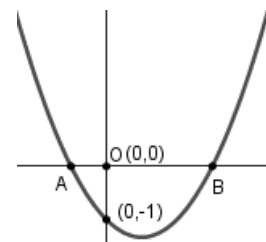
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



13479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$. Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

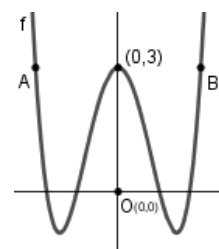
13454. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

β) Αν $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.



13557. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

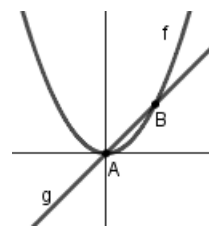
β) Αν $A(0, 0), B(1, 1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$,

να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.



14185. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

14190. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x, y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$.

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$.

14225. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in A$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f .

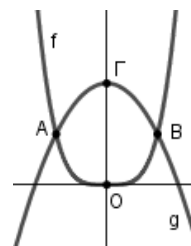
14307. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία A, B , είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g , ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ .

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$:

β) Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).



14459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

14665. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A και B .

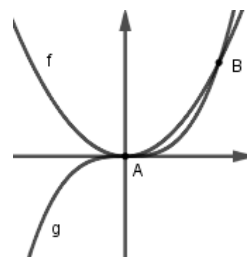
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

β) Με βάση το σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $x^3 < x^2$.

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι:

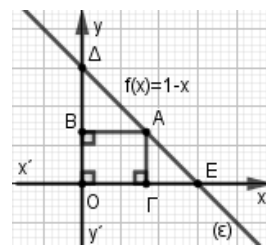
i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$ **ii.** $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$



14744.α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πότε ισχύει το ίσον;

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A, με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και E. Φέρνουμε από το A καθέτους στους άξονες και έστω B και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

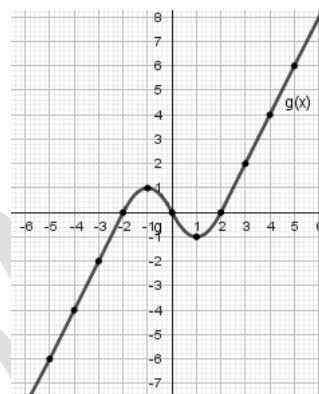


i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ABOΓ.

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού

ορθογωνίου ABOΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

14745. δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.



α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .

14760. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

14763. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4} + 2$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$.

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$.

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f .

iii. Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

14771. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x - \alpha}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

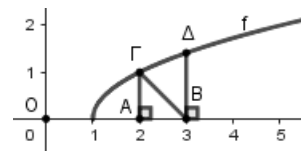
α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

γ) i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2, 1)$ και $(3, \sqrt{2})$ αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΒΓ.

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.



14786. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ .

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ .

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B .

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.

14810. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$.

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τεταγμένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

14925. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η

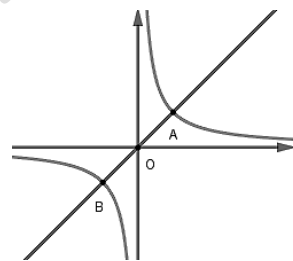
ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το O είναι το μέσο του AB .

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε τότε $(AB) = (MM')$.



14926. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$.

Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .

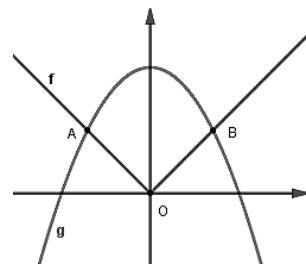
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι:

$$f(x) < g(x).$$

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βι.



14961. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - x - 1. \text{ Αν } A(\omega, 0), B(\varphi, 0)$$

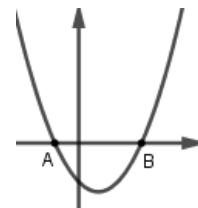
α) Να δείξετε ότι

$$\text{i. } \omega + \varphi = 1 \quad \text{ii. } \omega \cdot \varphi = -1$$

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \varphi$.

δ) Να δείξετε ότι $\varphi < \frac{5}{3}$.



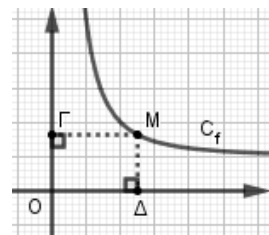
16153. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να

αποδείξετε ότι: **i.** $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$. **ii.** $E \geq 4$.



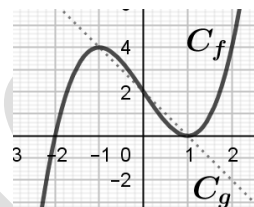
32742. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$.

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ) τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

δ) τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.



33597. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

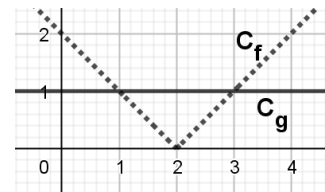
i) τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}.$$



33701. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

33894. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x \leq 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

33895. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

34309. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

35385. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός

αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

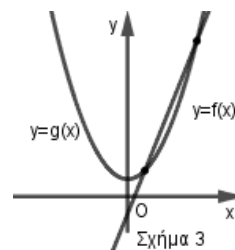
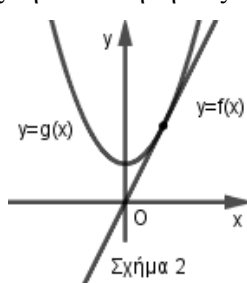
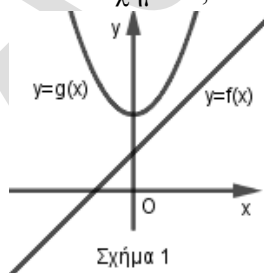
35409. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$.

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda x - \lambda + 2$ και $g(x) = x^2 - \lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$.

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ . Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



35410. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

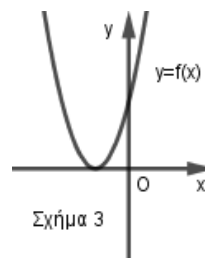
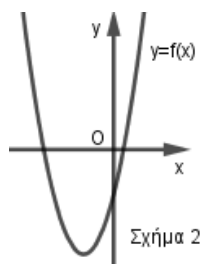
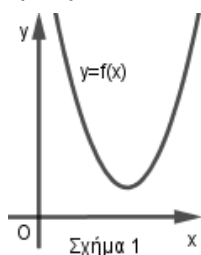
β) Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$.

Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ

αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



36657. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
 β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;
 γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

36676. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$ με $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a .
 β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
 i) Να αποδείξετε ότι $a = 2$.
 ii) Για $a = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
 γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - ax + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $a = 3$, $a = -2$, $a = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

37206. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.
 β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:
 i) Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
 ii) Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

38827. Έρευνα που έγινε το 2023 από το Εργαστήριο Ραδιενέργειας Περιβάλλοντος του ΕΚΠΑ αποκαλύπτει ότι ραδιενεργά ίχνη τα οποία συνδέονται με το πυρηνικό ατύχημα του Τσερνόμπιλ το 1986, εντοπίζονται ακόμη στην Αττική. Σύμφωνα με την έρευνα σε 23 πάρκα του Λεκανοπεδίου διαπιστώθηκε η παρουσία Καισίου 137

(^{137}Cs), αποτελεί ένα από τα συνηθέστερα προϊόντα σχάσης του ουρανίου, κι είναι ένα κατεξοχήν ραδιενεργό στοιχείο που συγκεντρώνεται συνήθως στα πρώτα 10 εκατοστά του εδάφους. Γνωρίζουμε ότι η μάζα του Καισίου 137 μειώνεται λόγω διάσπασης κατά 2,5% κάθε χρόνο.

α) Να υποθέσετε ότι τον 1ο χρόνο μετά από μια έκρηξη, η ποσότητα του Καισίου 137 είναι a_1 και να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν την ποσότητά του τα επόμενα χρόνια είναι όροι γεωμετρικής προόδου, της οποίας να προσδιορίσετε τον λόγο.

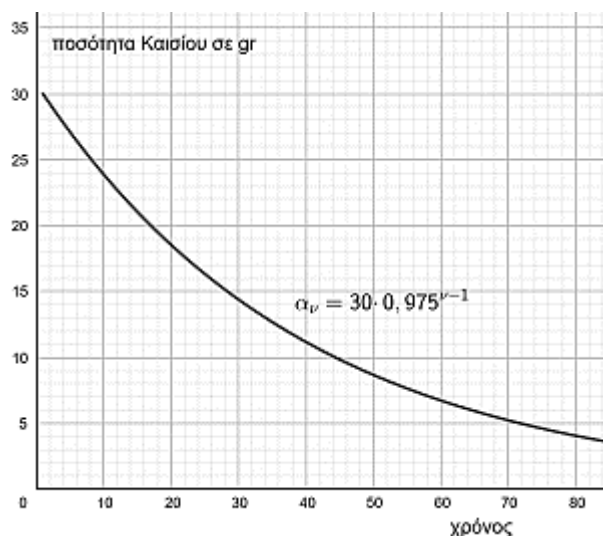
β) Αν η ζητούμενη γεωμετρική πρόοδος έχει γενικό όρο: $a_n = a_1 \cdot 0,975^{n-1}$ και τον 1ο χρόνο μετά από μια έκρηξη ανιχνεύονται σε μια περιοχή 10g/m^2 Καισίου 137, να υπολογίσετε πόση μάζα θα έχει απομείνει μετά από:

- i. 10 χρόνια ii. 100 χρόνια

γ) i. Το Καίσιο 137 θεωρείται επικίνδυνο για τους οργανισμούς, καθώς μπορεί να προκαλέσει καρκινογενέσεις

και γενετικές μεταλλάξεις. Στην πυρηνική καταστροφή στο Τσερνόμπιλ το 1986 η απελευθέρωση Καισίου 137 εκτιμήθηκε για τη γύρω περιοχή στα περίπου 30 g/m^2 . Αν τα όρια ασφαλείας για την καλλιέργεια των εδαφών απαιτούν η συγκέντρωση του Καισίου 137, σε βάθος εδάφους περίπου 10 cm , να είναι κάτω από 5 g/m^2 , είναι το 2025 ασφαλής η γύρω περιοχή για καλλιέργεια;

ii. Η ποσότητα ενός υλικού μειώνεται κατά το ήμισυ, όταν αυτό υποβάλλεται σε διαδικασίες όπως η ραδιενεργός αποσύνθεση ή άλλες χημικές ή φυσικές διεργασίες. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να εκτιμήσετε πόσο χρόνο χρειάζεται η αρχική ποσότητα των 30 g/m^2 Καισίου 137, για να μειωθεί στο μισό.



Δίνονται οι τιμές: $0.975^9 = 0.769$ $0.975^{99} = 0.079$ $0.975^{38} = 0.382$

38846. Μια αθλήτρια καταδύσεων προπονείται εκτελώντας βουτιές από έναν βράχο. Οι θέσεις της αθλήτριας κατά τη διάρκεια μιας βουτιάς μπορούν να θεωρηθούν σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 - 2$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η αθλήτρια βουτά από ύψος 3 m , πέφτει στο νερό στο σημείο Α και, κινούμενη όπως το διάγραμμα, βγαίνει από το νερό στο σημείο Β.



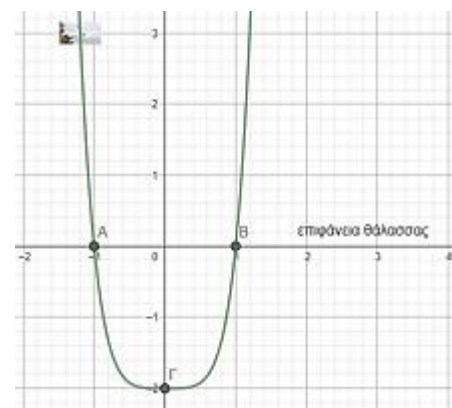
α) Να αιτιολογήσετε με βάση τον τύπο της συνάρτησης f ότι η αθλήτρια δεν μπορεί να φτάσει σε βάθος μεγαλύτερο των 2 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

β) i. Να βρείτε αν η αθλήτρια περνά από τις θέσεις $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{123}{64}\right)$ και

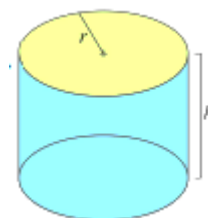
$\left(\frac{1}{4}, \frac{251}{16}\right)$. Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

ii. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων για τις οποίες η αθλήτρια βρίσκεται έξω από το νερό. Δίνεται ότι $f(-1,19) = f(1,19) \approx 3$.

iii. Σε μια βουτιά της η αθλήτρια κολύμπησε από το σημείο Γ ως το σημείο Β ευθύγραμμα. Να βρείτε την απόσταση ΓΒ που διήνυσε η αθλήτρια σε αυτή τη βουτιά.



38918. Τα κυλινδρικά μεταλλικά δοχεία (κονσέρβες) παράγονται σε εκατομμύρια, οπότε οποιαδήποτε εξοικονόμηση μπορεί να γίνει στην κατασκευή τους είναι σημαντική. Μέρος του κόστους κατασκευής τους εξαρτάται από την ποσότητα του μετάλλου που χρησιμοποιείται, επομένως είναι λογικό να επιδιώκεται ο σχεδιασμός κουτιών που απαιτούν την ελάχιστη δυνατή ποσότητα μετάλλου που θα περικλείει ορισμένο όγκο. Το πιο δημοφιλές μέγεθος κυλινδρικού μεταλλικού δοχείου (κονσέρβα), με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια του προβλήματος, περιέχει όγκο $V = 440 \text{ ml}$ περίπου.



Η επιφάνεια του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi rh + 2\pi r^2$ και ο όγκος του από την σχέση $V = \pi r^2 h$, όπου r είναι η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του κυλίνδρου.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την επιφάνεια E της κονσέρβας ως συνάρτηση της ακτίνας

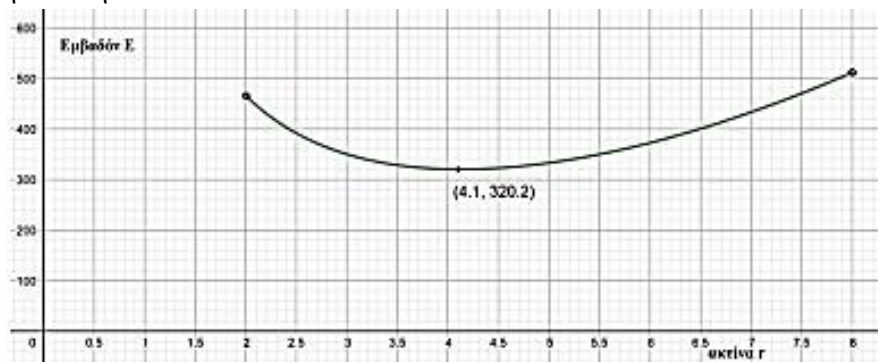
$r > 0$ είναι η $E(r) = \frac{880}{r} + 2\pi r^2$.

β) Οι κατασκευαστές αποφάσισαν να δοκιμάσουν η ακτίνα r της κονσέρβας να παίρνει τιμές μεταξύ 2 cm και 8 cm , για να δουν αν για κάποια τιμή της ακτίνας στο διάστημα αυτό θα ελαχιστοποιηθεί η επιφάνεια του δοχείου, άρα και η ποσότητα του μετάλλου που απαιτείται για την κατασκευή του.

Να δείξετε ότι η επιφάνεια E της κονσέρβας παίρνει τιμές μεταξύ $110 + 8\pi$ και $440 + 128\pi$.

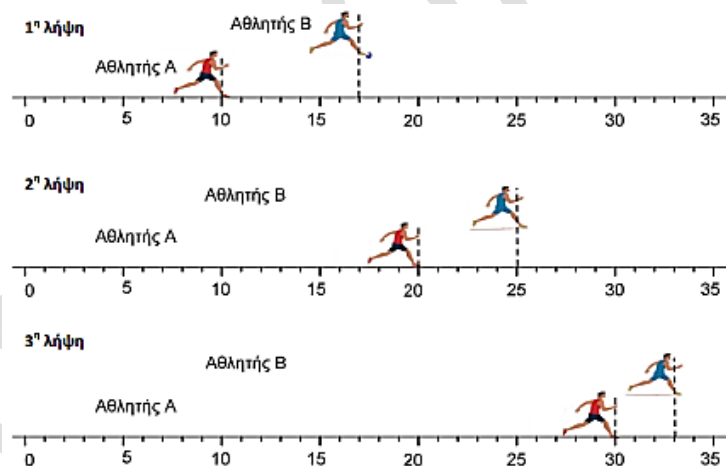
γ) Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(r) = \frac{880}{r} + 2\pi r^2$, για $2 < r < 8$.

Παρατηρούμε ότι για $r = 4,1\text{cm}$, η επιφάνεια της κονσέρβας παίρνει την τιμή $E = 320,2\text{ml}$, που είναι η μικρότερη δυνατή.



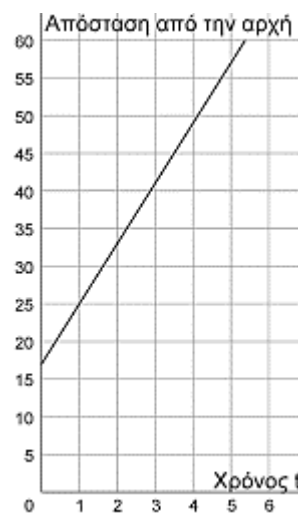
- i. Είναι η τιμή αυτή του εμβαδού μια τιμή μεταξύ των τιμών που βρήκατε στο β) ερώτημα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.
- ii. Να βρείτε το ύψος της κονσέρβας στην περίπτωση αυτή. Τι σχέση έχει το ύψος με την ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου, όταν ελαχιστοποιείται η ποσότητα του μετάλλου; Δίνεται ότι $16,81\pi \approx 53$.

38844. Ένας φωτογράφος αθλητικών γεγονότων, που έχει ρυθμίσει την κάμερά του να παίρνει αυτόματα διαδοχικές φωτογραφίες σε σταθερά χρονικά διαστήματα (λήψη ριπής), φωτογράφησε δύο αθλητές που έτρεχαν σε έναν αγώνα 60m κλειστού στίβου. Ο αθλητής A είχε παραπατήσει στην εκκίνηση και είχε μείνει αρκετά πίσω. Οι δύο αθλητές από τα 10m και μετά έτρεχαν με σταθερή ταχύτητα, τη μεγαλύτερη που μπορούσε ο καθένας. Παρακάτω φαίνονται οι τρεις πρώτες λήψεις.



- α) Σε ποια απόσταση από την αφετηρία θα απεικονίσει τον αθλητή A η τέταρτη κατά σειρά λήψη και σε ποια τον αθλητή B;
- β) Πόση θα είναι απόσταση από την αφετηρία του αθλητή A στη τη ν-οστή κατά σειρά λήψη και πόση του αθλητή B;
- γ) Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει φωτογραφία στην οποία απεικονίζονται και οι δύο αθλητές ακριβώς στην ίδια θέση.
- δ) Γνωρίζουμε ότι η φωτογραφική μηχανή παίρνει μία φωτογραφία ανά δευτερόλεπτο. Θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που έγινε η πρώτη λήψη.

- i. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας το διπλανό σχήμα, όπου έχει σχεδιαστεί η ευθεία της γραφικής παράστασης της απόστασης που έχει διανύσει ο αθλητής B σε σχέση με τον χρόνο t . Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για τον αθλητή A.
- ii. Με βάση τις δύο γραφικές παραστάσεις, περίπου πόσο χρόνο μετά τη λήψη της πρώτης φωτογραφίας θα φτάσει ο αθλητής A τον αθλητή B;



iii. Να εξηγήσετε γιατί η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα δεν μπορεί να είναι 3sec ή 4sec.

38869. Η Ελένη και η Αϊσέ δημιούργησαν τη δική τους εταιρεία συντήρησης και επισκευής ηλεκτρονικών υπολογιστών. Για να διαφημίσουν τις υπηρεσίες τους, ανάρτησαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την παρακάτω διαφήμιση:

Έχετε πρόβλημα με τον υπολογιστή σας; Έχουμε τη λύση. Σας επισκεπτόμαστε στο σπίτι και ξανακάνουμε τον υπολογιστή σας ένα λειτουργικό εργαλείο για εσάς. Τιμές γνωριμίας: 20 ευρώ για την επίσκεψη στο σπίτι σας και 30 ευρώ για κάθε ώρα που θα χρειαστούμε, για να ξανακάνουμε τον υπολογιστή σας καινούργιο. Προσοχή: 1. Η χρέωση ξεκινάει στην αρχή κάθε ώρας 2. Προβλήματα που χρειάζονται αντικατάσταση υλικού απαιτούν μεταφορά του υπολογιστή σας στον χώρο μας, με χρέωση ανάλογη της επισκευής.

α) Η Χριστίνα έχει έναν υπολογιστή που παρουσίασε προβλήματα, είδε την παραπάνω διαφήμιση και τηλεφώνησε για να έρθουν να τον επισκευάσουν. Τι ποσό θα πληρώσει η Χριστίνα για εργασία 2 ωρών;

β) Να βρείτε μια συνάρτηση f που να εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει κάποιος για επισκευή του υπολογιστή

στο σπίτι ως συνάρτηση των ωρών x απασχόλησης της Αϊσέ (ή της Ελένης).

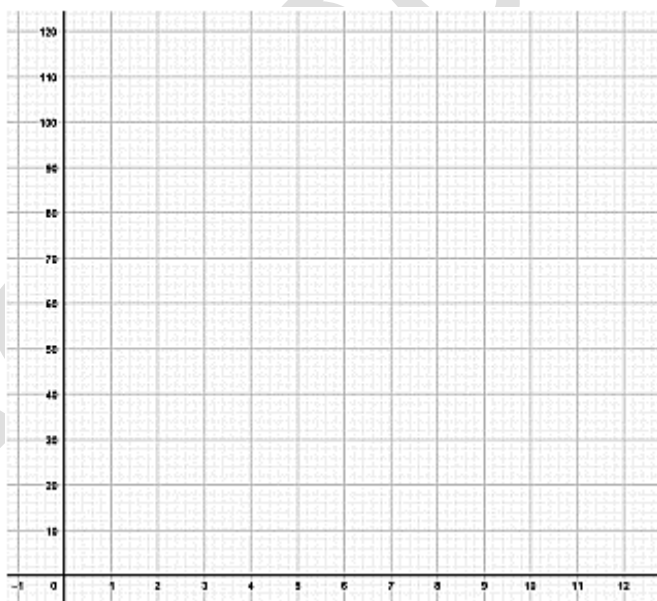
γ) i. Να σχεδιάσετε στο σύστημα αξόνων που δίνεται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) \in \mathbb{R}$.

ii. Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μόνο κάποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της

$f(x) \in \mathbb{R}$ περιγράφουν το ποσό που θα πληρώσει κάποιος ως συνάρτηση των ωρών x απασχόλησης της

Αϊσέ και της Ελένης. Να περιγράψετε τα σημεία στα οποία αναφέρεται ο Γιάννης και να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ) Η Ελένη και η Αϊσέ σκέφτονται να αλλάξουν τη διαφήμισή τους, ώστε να προσελκύσουν περισσότερους πελάτες. Σκέφτονται να μειώσουν το κόστος επίσκεψης από 20€ σε 10€, αλλά να αυξήσουν τη χρέωση ανά ώρα από 30€ σε 35€. Πιστεύετε ότι αυτή η αλλαγή θα είναι συμφέρουσα για τους πελάτες; Για πόσες ώρες επισκευής θα τους συμφέρει; Να εξηγήσετε την άποψή σας.



38845. Μια εταιρεία πουλάει φανέλες προς 25€ τη μία. Το κόστος παραγωγής κάθε φανέλας είναι 5€.

Οι πωλήσεις της εταιρείας με αυτή την τιμή (25€) είναι κατά μέσο όρο 100 φανέλες την ημέρα. Η έρευνα δείχνει ότι για κάθε μείωση της τιμής κατά 1€, η εταιρεία πουλάει 10 επιπλέον φανέλες.

α) Πόσο κέρδος την ημέρα έχει η εταιρεία, όταν πουλάει την κάθε φανέλα με 25€;

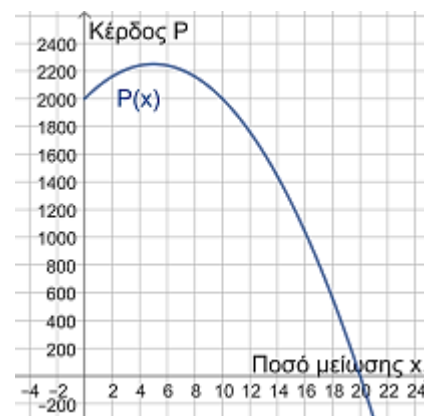
β) Πόσο κέρδος την ημέρα θα έχει η εταιρεία, αν μειώσει την τιμή κάθε φανέλας κατά 2€, δηλαδή από τα 25€ στα 23€;

γ) Αν η εταιρεία μειώσει την τιμή του προϊόντος κατά x €, να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το

ημερήσιο κέρδος P της εταιρείας ως συνάρτηση του x .

δ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η καμπύλη της συνάρτησης του κέρδους P σε σχέση με τη μείωση της τιμής x .

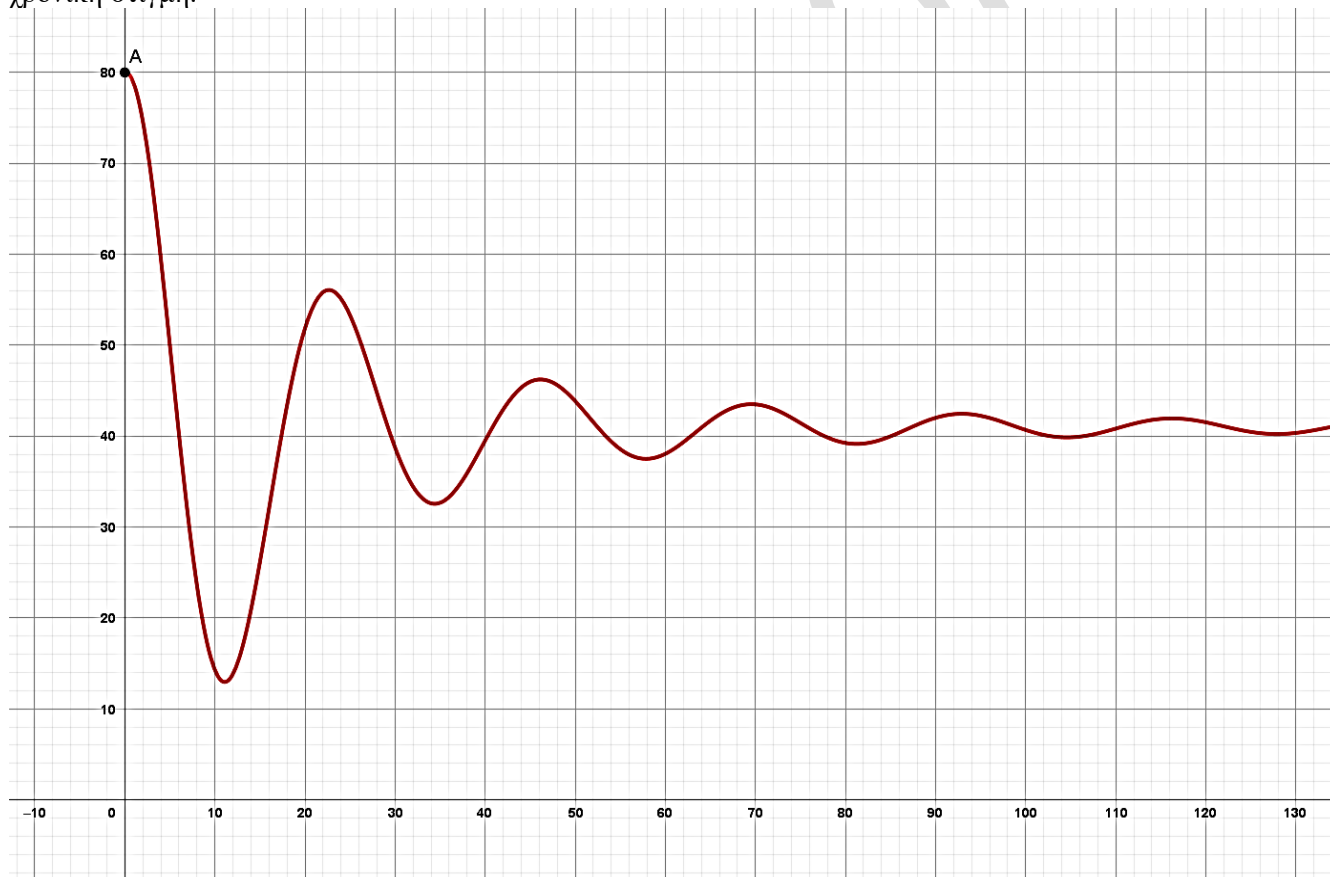
- Μέχρι πόσο μπορεί να μειώσει η εταιρεία την τιμή κάθε φανέλας, ώστε να μην έχει ζημιά (δηλαδή τα έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος);
- Να εκτιμήσετε τη μικρότερη τιμή με την οποία μπορεί να πουλάει η εταιρεία την κάθε φανέλα, ώστε το κέρδος της να μην είναι μικρότερο από αυτό που έχει τώρα.



38916. Κατά το άλμα ενός ανθρώπου στο μπάντζι τζάμπινγκ (bungee jumping) καταγράφηκαν τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

χρόνος sec)	0	2	6	8	10	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55
ύψος (m)	80	74	40	23	14	13	26	52	53	39	33	40	46	44	38

Ένας από τους ερευνητές που μελετούσαν το άλμα, προκειμένου να καθορίσουν την επίδρασή του στον ανθρώπινο οργανισμό, πρότεινε ως μοντέλο την παρακάτω γραφική παράσταση. Ο οριζόντιος άξονας παριστάνει τον χρόνο που περνάει από τη στιγμή που ο άνθρωπος πηδά και ο κατακόρυφος άξονας παριστάνει το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο άνθρωπος, δηλαδή την απόστασή του από το έδαφος σε κάθε χρονική στιγμή.



Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες:

- Να εκτιμήσετε ποια θα είναι περίπου η απόσταση του ανθρώπου από το έδαφος κατά τις χρονικές στιγμές 60 sec, 65 sec, 74 sec, 78 sec και 84 sec, όπως προβλέπεται από το μοντέλο.
- Να βρείτε από ποιο ύψος πηδάει ο άνθρωπος, ποιο είναι το μικρότερο ύψος στο οποίο φτάνει και σε ποια χρονική στιγμή φτάνει σε αυτό.
- Σε ποιες χρονικές στιγμές ο άνθρωπος φτάνει σε ύψος 40 μέτρων μέσα στα πρώτα 40 sec μετά την πτώση;
- Κάποιος ισχυρίστηκε ότι μετά τα πρώτα 40 sec η διαφορά ύψους χαμηλότερου και ψηλότερου σημείου της κίνησης του ανθρώπου είναι μικρότερη από 5 μέτρα. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με αυτόν τον ισχυρισμό;

Να εξηγήσετε γιατί.

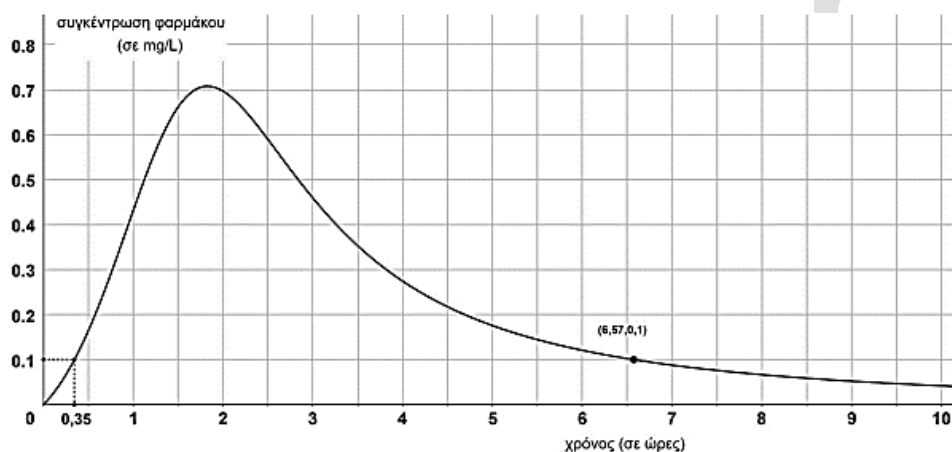
ε) Να εκτιμήσετε τι συμβαίνει στη διαφορά ύψους χαμηλότερου και ψηλότερου σημείου της κίνησης του ανθρώπου όσο περνά ο χρόνος, δηλαδή για μεγάλες τιμές του χρόνου.

38919. Μετά τη λήψη ενός φαρμάκου από το στόμα η δραστική ουσία του περνάει στο αίμα. Στην αρχή η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα (σε mg/L - χιλιοστόγραμμα ανά λίτρο) αυξάνεται γρήγορα, φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της και μετά σιγά σιγά μειώνεται. Η αποτελεσματικότητα του φαρμάκου εξαρτάται από την συγκέντρωσή του στο αίμα. Η ελάχιστη αποτελεσματική συγκέντρωση είναι η τιμή της συγκέντρωσης, πάνω από την οποία το φάρμακο είναι αποτελεσματικό.

Η ελάχιστη αποτελεσματική συγκέντρωση ενός συγκεκριμένου φαρμάκου A είναι 0,1 mg/L.

Η συνάρτηση που δίνει τη συγκέντρωση του παραπάνω φαρμάκου A στο αίμα x ώρες μετά τη λήψη μιας

δόσης, είναι $f(x) = \frac{7,8x^2 + 6x}{2x^4 + 30}$, $x \geq 0$, της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα.



α) i. Πόση ώρα μετά τη λήψη του το φάρμακο A αρχίζει να είναι αποτελεσματικό;

ii. Ποια είναι η ακριβής συγκέντρωση στο αίμα 4 ώρες μετά τη λήψη;

β) i. Ο φαρμακοποιός ενημερώνει τον ασθενή ότι το φάρμακο A δεν θα είναι αποτελεσματικό 10 ώρες μετά τη λήψη του. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

ii. Αν ένας ασθενής πάρει μία δόση, για πόσες ώρες η συγκέντρωση του φαρμάκου A στο αίμα θα είναι τέτοια, ώστε να είναι αποτελεσματικό;

Δίνεται ότι $148,8:542 \cong 0,275$ και $840:20.030 \cong 0,04$.

38922. Ένα πλοίο εκτελεί δρομολόγια από το λιμάνι A προς το λιμάνι B ενός ποταμού και αντίστροφα.

Γνωρίζουμε ότι η απόσταση που διανύει το πλοίο για να πάει από το ένα λιμάνι στο άλλο είναι 40 km.

Επίσης, ο ποταμός κυλάει από το λιμάνι A προς το

λιμάνι B με ταχύτητα 5 km/h. Επομένως, για να

υπολογίσουμε την ταχύτητα του πλοίου ως προς τη

στεριά, στην ταχύτητα v με την οποία κινείται από τις

μηχανές του, προσθέτουμε ή αφαιρούμε 5 km/h,

ανάλογα με το αν αυτό κινείται μαζί με το ρεύμα του ποταμού ή κόντρα σε αυτό.

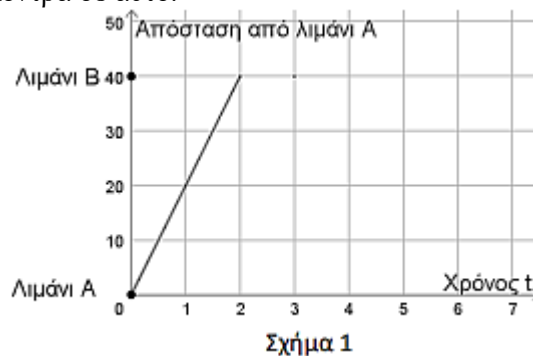
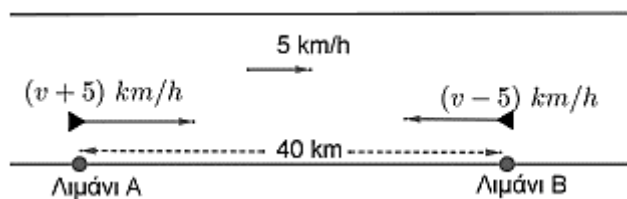
α) Στο σχήμα 1 φαίνεται η απόσταση του πλοίου από το λιμάνι A, καθώς κινείται προς το λιμάνι B σε σχέση με τον χρόνο.

i. Να υπολογίσετε την ταχύτητα v που προσδίδουν οι μηχανές στο πλοίο.

ii. Να υπολογίσετε πόσο χρόνο θα χρειαστεί το πλοίο, για να επιστρέψει από το λιμάνι B στο λιμάνι A.

β) i. Αν το πλοίο αναχώρησε σχεδόν αμέσως από το λιμάνι B προς το λιμάνι A, να μεταφέρετε στο γραπτό σας το Σχήμα 1 και να συμπληρώσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της απόστασης του πλοίου από το λιμάνι A σε σχέση με τον χρόνο, καθώς επιστρέφει από το λιμάνι B.

ii. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής του από το λιμάνι A στο B



και πίσω, ποια χρονικά διαστήματα η απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Α ήταν μικρότερη από την απόστασή του από το λιμάνι Β;

(Δίνεται ότι ένα κινητό, που κινείται με σταθερή ταχύτητα u για χρόνο t , διανύει διάστημα $S = ut$).

38924. Μια εταιρεία κατασκευής κεριών έχει ένα είδος κεριού, το οποίο καίγεται κατά $0,1 \cdot t^2$ εκατοστά, όπου t είναι ο χρόνος σε λεπτά από την στιγμή που ανάβουμε το κερί.

α) Ανάβουμε ένα τέτοιο κερί ύψους 12 εκατοστών στις 12:00' π.μ.

i. Στις 12:05' π.μ. τι μέρος του κεριού θα έχει καεί;

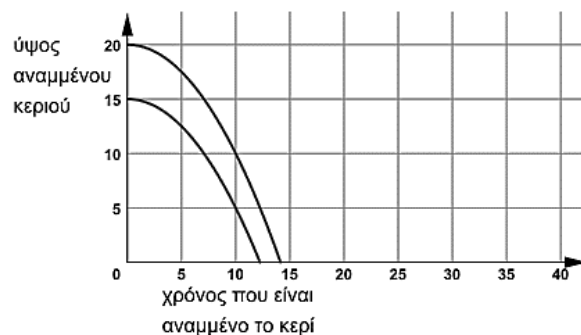
ii. Να αποδείξετε ότι στις 12:11' π.μ. θα έχει καεί ολόκληρο το κερί.

β) Αν ℓ είναι το ύψος ενός κεριού από το παραπάνω είδος, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του ύψους του κεριού που δεν έχει καεί ακόμα μετά από t λεπτά που είναι αναμμένο, δίνεται από τον τύπο $\ell - 0,1 \cdot t^2$.

γ) i. Να βρείτε τη συνάρτηση της οποίας οι τιμές εκφράζουν το ύψος ενός αναμμένου κεριού με αρχικό ύψος 15 εκατοστά μετά από t λεπτά που είναι αναμμένο.

ii. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική της συνάρτησης του ύψους ενός αναμμένου κεριού με ύψος 15 εκατοστά και ενός δεύτερου αναμμένου κεριού του ίδιου είδους αλλά διαφορετικού αρχικού ύψους.

Ποιο θα είναι το ύψος του κάθε κεριού μετά από 10 λεπτά που είναι αναμμένα;



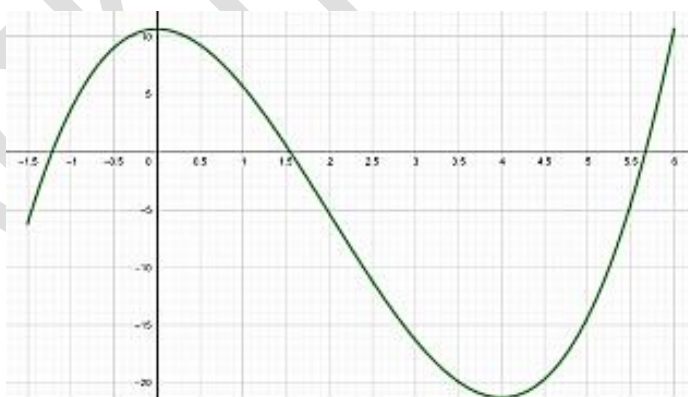
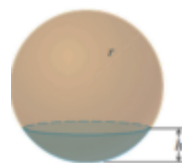
38930. Οι «κάψουλες με απορρυπαντικό» μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλους τους τύπους πλυντηρίων ρούχων. Βοηθούν ώστε η πλύση να έχει καλύτερα αποτελέσματα (χωρίς χρήση μαλακτικού και πρόπλυσης).

α) Μια εταιρεία παράγει σφαιρικές κάψουλες ακτίνας $r = 2\text{cm}$ με το εξής χαρακτηριστικό: ο όγκος του σφαιρικού τμήματος ύψους h , που περιέχει το απορρυπαντικό, είναι ίσος με το $1/3$ του όγκου της κάψουλας.

i. Να δείξετε ότι το ύψος h είναι λύση της εξίσωσης $3h^3 - 18h^2 + 32 = 0$.

ii. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{32}{3}, \text{ για } -1,5 < x < 6$$



Να αξιοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση, για να εκτιμήσετε το ύψος h του σφαιρικού τμήματος που περιέχει το απορρυπαντικό, εξηγώντας τη σκέψη σας.

β) Μια άλλη εταιρεία ισχυρίζεται ότι μπορεί να εξασφαλίσει τον ίδιο όγκο απορρυπαντικού γεμίζοντας τα $2/9$ μιας κυλινδρικής κάψουλας ίδιας ακτίνας και ύψους ίσου με τη διάμετρο της σφαιρικής.

Να εξηγήσετε γιατί ισχύει ο ισχυρισμός αυτός.

Δίνεται ο όγκος του κυλίνδρου $V = \pi r^2 \cdot h$, όπου r η ακτίνα και h το ύψος του κυλίνδρου, ο όγκος της

σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, όπου r η ακτίνα της σφαίρας, και ο όγκος ενός σφαιρικού τμήματος $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$,

όπου h το ύψος του τμήματος και r η ακτίνα της σφαίρας.

Θέμα 3ο

14604. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$.

14752. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

14754. α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = 6x$.

14673. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.

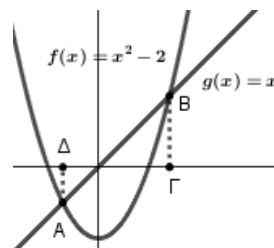
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.

37190. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.



Θέμα 1ο

14782. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι για κάθε τιμή των x, y , συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ii. Η εξίσωση $x^v = a$ με $a < 0$ και v περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[v]{|a|}$.

iii. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει $|a| + |\beta| = |a + \beta|$

iv. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με λόγο $\lambda = 1$, το άθροισμα των n πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_n = n \cdot a_1$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να δείξετε ότι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$.

14813. Α1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

i) Αν $a \leq 0$ και n άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{a} = |a|$.

ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.

iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (a_n) με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω . Το άθροισμα S_n των n

πρώτων διαδοχικών όρων της (a_n) δίνεται από την σχέση $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + (n-1)\omega]$.

iv) Η εξίσωση $a \cdot x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x , όταν $a = 0$ και $\beta \neq 0$.

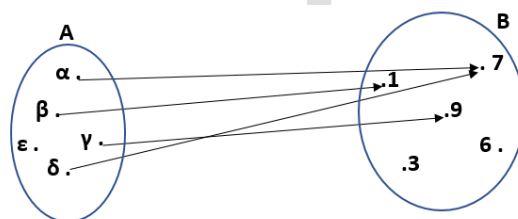
v) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου A σε στοιχεία ενός συνόλου B. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

A) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.

B) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του A.

Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου A αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου B, το 7.

Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ϵ δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του B.



A2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του a .

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a, β ισχύει: $\sqrt{a+\beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.

iii. Η εξίσωση $x^n = a$, με n περιττό φυσικό και $a < 0$, έχει λύση την $x = \sqrt[n]{a}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ ισχύει $f(5) = 3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = a\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι:

$$a_n = a_1 + (n-1)\omega.$$

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

Θέμα 2ο

12630. Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

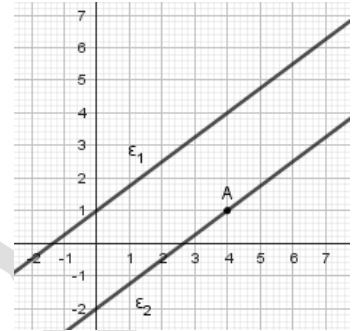
- α)** Να βρείτε τις τιμές των a και β .
β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα y' .
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

12631. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο

ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το

σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

- α)** Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) .
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) .
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.



12684. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2)

διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

- α)** Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα y' .
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα x' .
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

12730. Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$.

- α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. Δίνεται ότι $\tan 45^\circ = 1$.
β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα x' στο σημείο με τετμημένη 2 .

12856. Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y = ax + 5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

- α) i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε .
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x' .
β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x' και y' .

12913.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

- i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .
ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.
iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

12939. Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

- α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β .
β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

13033. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + 4$.

- α) i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .

- ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;
 β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε).
 γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

13054. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:
 i. Τις εξισώσεις των ευθειών.
 ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx' .
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

13178. Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.
 β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .
 i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N , είναι συμμετρικά ως προς το O .

13318. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), [f(-\sqrt{2})]^2$.
 β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

13400. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$.

- α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
 γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

13471. Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1), B(-1, -5), \Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

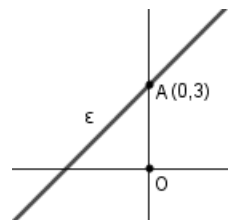
- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία.
 Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

14575. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.
 γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

14641. Η διπλανή ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .
 β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε .
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.
 (Δίνεται ότι $\varepsilon \varphi 45^\circ = 1$)



21239. Η ευθεία $y = ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .
 β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

35201. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των a, β .

β) Αν $a=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

37183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 5$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

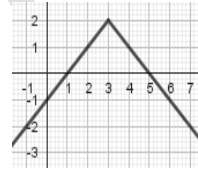
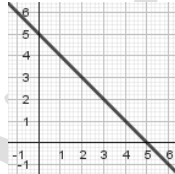
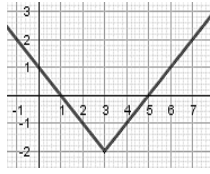
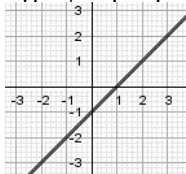
Θέμα 4ο

12681. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$.

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x - 3| > -1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

12682. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g .

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του;

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό

που περνάει;

12728. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ .

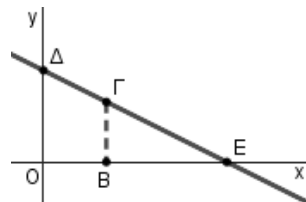
Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι

$$y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t.$$

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ) Αν το εμβαδόν του τραpezίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .



12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

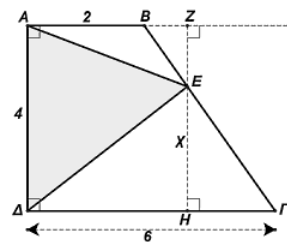
12834. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε $AB=2$, $A\Delta=4$, $\Gamma\Delta=6$, ενώ η $A\Delta$ είναι κάθετη στην AB και επίσης κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Το σημείο E μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ και ονομάζουμε x την απόσταση του E από την $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AE\Delta$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.



12914. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.

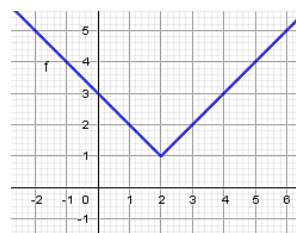
α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

γ) i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).



12921. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|x-2|$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της

παραμέτρου κ .

γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB) .

12942. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με παράμετρο } a.$$

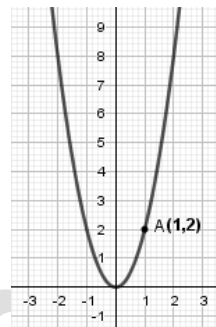
α) Αν το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.



12944. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \neq 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|a| \geq 2$.

13055. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$.

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

13091. Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

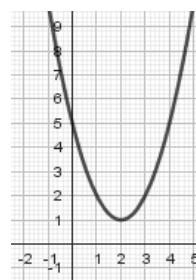
$$f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i.

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.



13298. Τα σημεία A και B είναι σημεία του $1^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

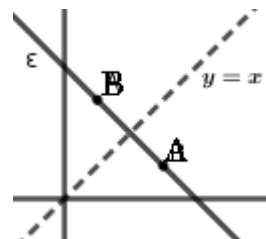
α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις

συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

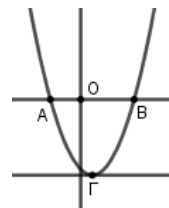
γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες

$(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:



- i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.
 ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

13314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

13367. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
 ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
 iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

13473. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι $A=2$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3| - |x-1| = 2$.

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 3 - x \text{ και } g(x) = x - 1 \text{ για } 1 \leq x \leq 3.$$

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)| = 2$.

14184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

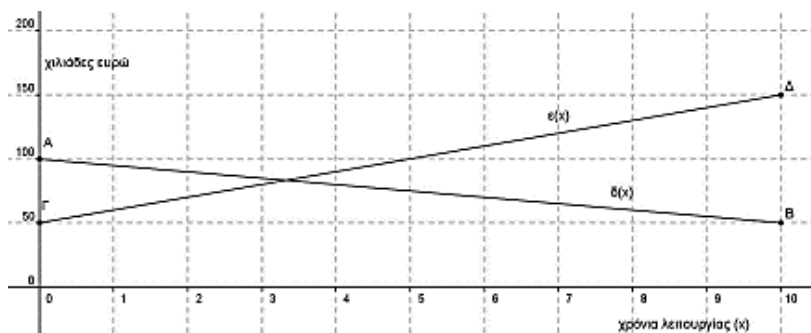
14320. Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά.

Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0, 6] \\ 16, & x \in (6, 9] \\ 25 - x, & x \in (9, 12] \end{cases}$ και μετριέται

σε βαθμούς Κελσίου.

- α)** Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.
- β)** Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:
- Διατηρείται σταθερή.
 - Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.
- γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

14477. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μίας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.



Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

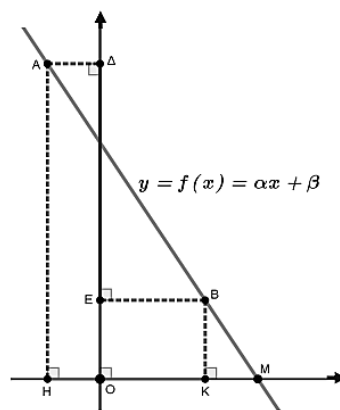
- α)** Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.
- β) i)** Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x), \varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο
- ερώτημα ήταν σωστές.
- ii)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

14556. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = ax + \beta$, όπου a, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x, y είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

- α)** Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.



33754. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία A χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$, όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

- α)** Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας A , ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;
- β)** Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;
- γ)** Μία άλλη εταιρεία, η B , χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση

που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

33894. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

34183. Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			
x (km)			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

34312. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g

των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και

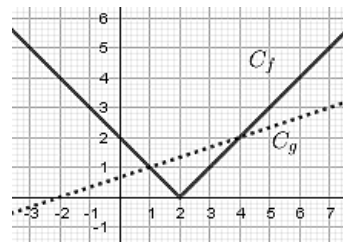
$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Με βάση το σχήμα να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$.



36652. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .

36655. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
 γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

36659. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

- i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

36681. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

36682. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

36683. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a , η ευθεία $y = a$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

36684. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

37203. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.

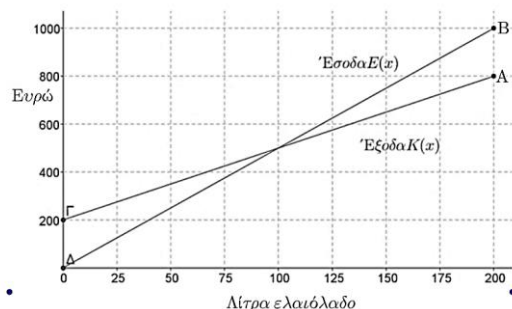
Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).



38791. Ένας μαραγκός έχει μια μικρή επιχείρηση που φτιάχνει και πουλάει ξύλινα τραπέζια. Επιθυμώντας να αυξήσει τα κέρδη του, αποφάσισε αρχικά να μελετήσει την παραγωγή και τις πωλήσεις του.

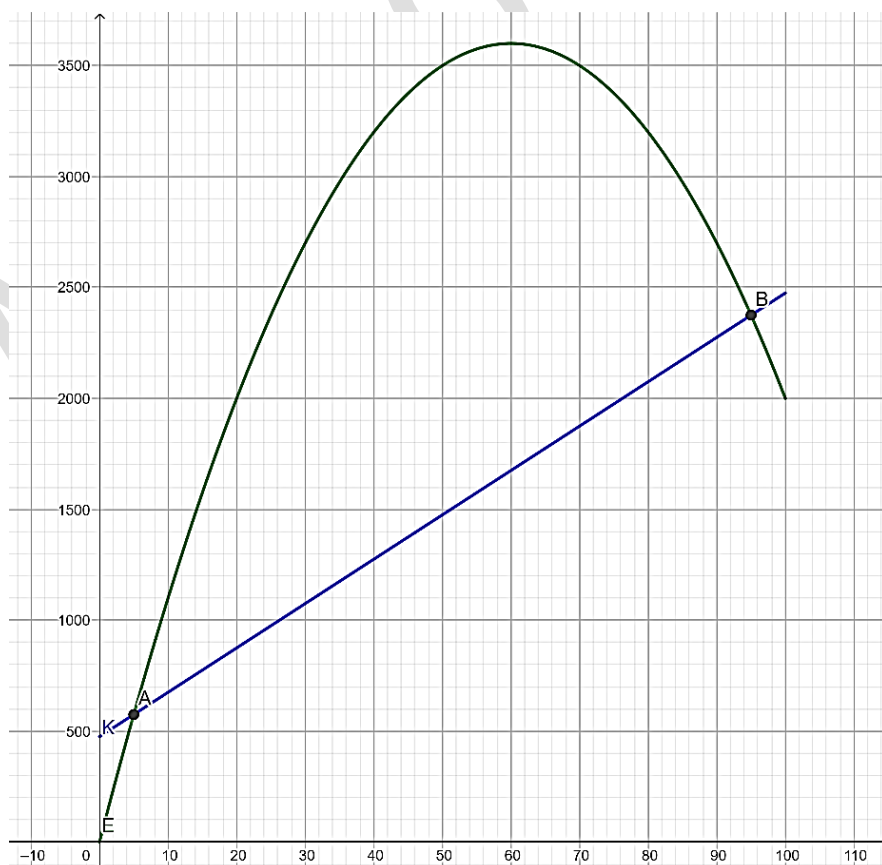
Υπολόγισε ότι, όταν πωλούνται x τραπέζια, η τιμή πώλησης σε ευρώ ενός τραπεζιού είναι $p(x) = 120 - x$ με $0 \leq x \leq 100$.

α) Ποιος είναι ο τύπος που εκφράζει τα έσοδα της επιχείρησης από την πώληση x τραπεζιών;

Στη συνέχεια βρήκε επίσης ότι το μηνιαίο κόστος παραγωγής $K(x)$ σε ευρώ, όταν παράγει x τραπέζια, προκύπτει από τη σχέση: $K(x) = 20x + 475$.

β) Να δώσετε μια ερμηνεία για το τι εκφράζει ο αριθμός 20 και τι ο αριθμός 475 στον τύπο του $K(x)$.

γ) Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των εσόδων $E(x)$ και του μηνιαίου κόστους παραγωγής $K(x)$ ως συνάρτηση της πώλησης x τραπεζιών.



ι. Να παρατηρήσετε τις γραφικές παραστάσεις και να δώσετε μια λεκτική ερμηνεία για το τι παριστάνουν

τα σημεία A(5,575) και B(95, 2375) στο πλαίσιο του προβλήματος.

ii. Πότε η επιχείρηση έχει κέρδος και πότε έχει ζημία; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

iii. Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί η επιχείρηση να παράγει και να πουλήσει 110 τραπέζια.

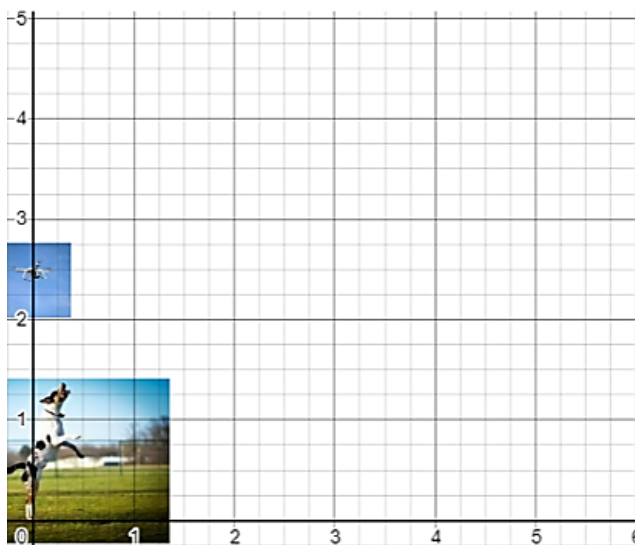
38803. Στο διαδίκτυο υπάρχουν διάφορες εικόνες με drones που πετούν και σκύλους που τα κυνηγούν

γαβγίζοντας. Σε μία τέτοια εικόνα, όπου ένας σκύλος τρέχει κυνηγώντας ένα drone και κάνει ένα άλμα προς αυτό, τοποθετήθηκε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων όπως στο παρακάτω σχήμα. Ο οριζόντιος άξονας (x) δείχνει την οριζόντια απόσταση που διανύουν το drone και ο σκύλος (σε μονάδες μήκους) από τις αρχικές τους θέσεις, ενώ ο κατακόρυφος άξονας (y) δείχνει την αντίστοιχη κατακόρυφη απόσταση από το έδαφος. Αν ο σκύλος και το drone είναι δύο σημεία που κινούνται στο σύστημα συντεταγμένων, τότε η τροχιά του drone

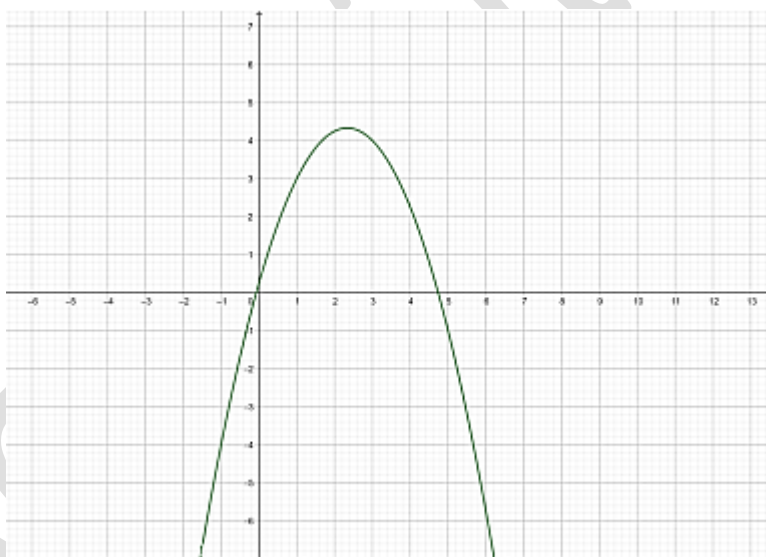
περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ και

η τροχιά του σκύλου περιγράφεται από τη

συνάρτηση $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{4}$.



α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται σχεδιασμένη η τροχιά του σκύλου. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την τροχιά του drone.



β) Θα καταφέρει ο σκύλος να φτάσει το drone; Αν ναι, σε ποιο σημείο θα συμβεί αυτό για πρώτη φορά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ και $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{4}$.

38805. Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο υλικό για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας στις μέρες μας είναι ο χαλκός, ο οποίος όχι μόνο είναι εξαιρετικός αγωγός του ηλεκτρισμού, αλλά και ένα φθινό υλικό με υψηλή ολκιμότητα (μορφοποιείται εύκολα σε σύρμα). Η αντίσταση (R) του χαλκού αλλάζει όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία (T), και συγκεκριμένα αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Μέσα σε ένα ευρύ φάσμα θερμοκρασιών (περίπου -200°C έως 500°C), αυτή η σχέση είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής $R = \alpha T + \beta$. Για ένα συγκεκριμένο κομμάτι χάλκινου σύρματος, η αντίσταση είναι $R = 12,56 \Omega$ (Ohm) σε θερμοκρασία $T = 0^{\circ}\text{C}$. Όταν η θερμοκρασία αυξάνεται στους 27°C , η αντίσταση αυξάνεται στα $13,8 \Omega$.

α) Να βρείτε την εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αντίστασης R στο σύρμα σε σχέση με τη θερμοκρασία του T .

β) Να προσδιορίσετε την κλίση της ευθείας $R = \alpha T + \beta$ που βρήκατε στο α) ερώτημα και να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω προτάσεις περιγράφει τι αντιπροσωπεύει αυτή η κλίση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Τη μεταβολή της αντίστασης, όταν η θερμοκρασία αυξάνεται κατά 1°C .

ii. Τη αντίσταση, όταν η θερμοκρασία είναι 0°C .

iii. Τη θερμοκρασία, στην οποία η αντίσταση θα ήταν $0\ \Omega$.

iv. Τη μεταβολή της θερμοκρασίας, όταν η αντίσταση αυξάνεται κατά $1\ \Omega$.

γ) Γενικά, όσο μικρότερη είναι η αντίσταση στο σύρμα, τόσο μειώνονται οι απώλειες ισχύος, όταν περνάει ρεύμα. Γι' αυτό θέλουμε να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερη αντίσταση. Με δεδομένο ότι σε ένα ευρύ φάσμα θερμοκρασιών η σχέση μεταξύ της αντίστασης και της θερμοκρασίας περιγράφεται από την εξίσωση $R = 0,046T + 12,56$, να βρείτε:

i. Σε ποια θερμοκρασία η αντίσταση θα μειωνόταν στα $10,26\ \Omega$.

ii. Μεταξύ ποιων τιμών θα κυμαίνεται η αντίσταση του σύρματος, αν $(T, -50^\circ\text{C}) \leq 50^\circ\text{C}$.

Δίνεται ότι $1,24 \div 27 \approx 0,046$.

38790. Το σύστημα θέρμανσης και ψύξης στο σπίτι της Ελένης έχει σχεδιαστεί, ώστε να διατηρείται η θερμοκρασία στο εσωτερικό του όσο το δυνατόν πιο κοντά στους 23°C . Η Ελένη σε μια ανοιξιάτικη ημέρα σημείωσε τη θερμοκρασία T μέσα στο σπίτι της σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Παρατήρησε ότι η θερμοκρασία T είχε απόσταση 2°C από την επιθυμητή θερμοκρασία των 23°C .

α) Να γράψετε μία εξίσωση για τη θερμοκρασία T , που να αποτυπώνει αυτό που παρατήρησε η Ελένη.

β) Το σύστημα θέρμανσης και ψύξης του σπιτιού επίσης έχει ρυθμιστεί, ώστε να διατηρεί την εσωτερική θερμοκρασία T σε ένα εύρος «άνετων» θερμοκρασιών. Αυτό μπορεί να προκύψει από τη σχέση: $|T - 23| \leq 5$.

Ποιο είναι αυτό το εύρος των θερμοκρασιών T που επιτρέπει το σύστημα θέρμανσης και ψύξης του σπιτιού της Ελένης;

γ) Το σύστημα ψύξης έχει ρυθμιστεί, ώστε να δροσίζει το χώρο. Όταν η εξωτερική θερμοκρασία είναι x , η θερμοκρασία μέσα στο σπίτι δίνεται από τον τύπο

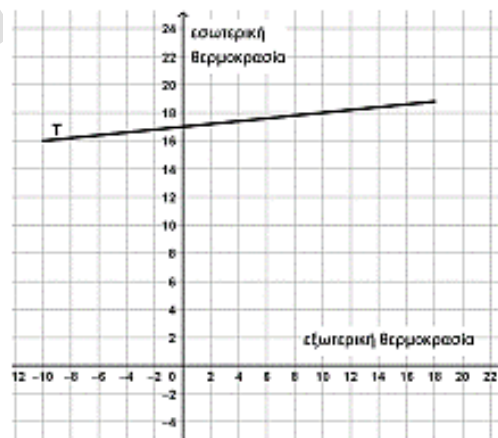
$$T_1(x) = \frac{1}{3}x + 17, \text{ όπου } 28^\circ\text{C} \leq x \leq 40^\circ\text{C}.$$

Για ποιο εύρος εξωτερικών θερμοκρασιών το σπίτι θα διατηρείται σε μια άνετη θερμοκρασία μεταξύ 18°C και 28°C ;

δ) Το σύστημα θέρμανσης από την άλλη είναι αυτό που κρατάει ζεστό το σπίτι. Η γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία T μέσα στο σπίτι, όταν η εξωτερική θερμοκρασία x κυμαίνεται μεταξύ -10°C και 18°C .

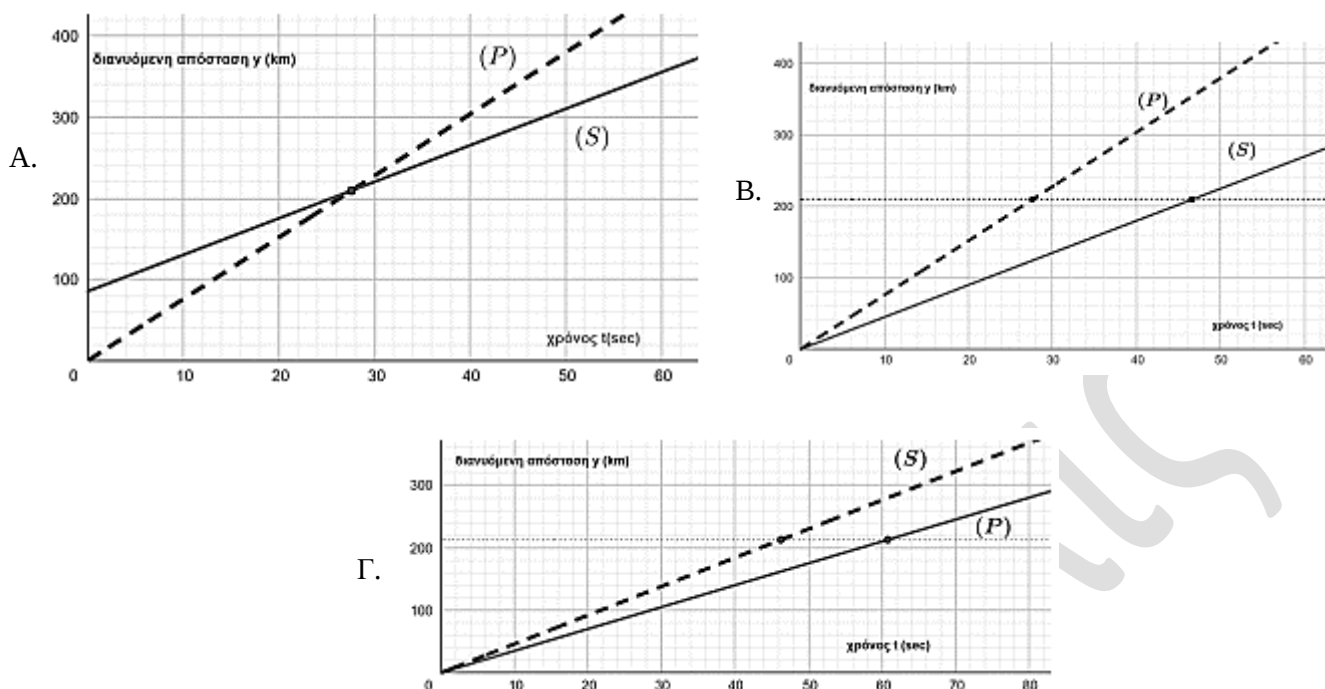
Ποια από τις παρακάτω προτάσεις θα μπορούσε να περιγράψει λεκτικά τη συνάρτηση της γραφικής παράστασης;

1. Για κάθε έναν βαθμό Κελσίου που αυξάνεται η εξωτερική θερμοκρασία, η εσωτερική θερμοκρασία αυξάνεται κατά το $1/10$ του βαθμού.
2. Η εξωτερική θερμοκρασία αυξάνεται κατά $0,1$ βαθμούς Κελσίου για κάθε έναν βαθμό που αυξάνεται η εσωτερική.
3. Η εσωτερική θερμοκρασία είναι το $1/10$ της εξωτερικής.
4. Η εξωτερική θερμοκρασία είναι αυξημένη κατά 17 βαθμούς περισσότερο από την εξωτερική αυξημένη κατά το $1/10$ της εσωτερικής.



38808. Οι σεισμοί μπορούν να προκαλέσουν τεράστιες ζημιές, συμπεριλαμβανομένης της απώλειας ανθρώπινων ζώων, και έτσι είναι ένας σημαντικός τομέας μελέτης. Ο προσδιορισμός της θέσης του επίκεντρου ενός σεισμού (δηλαδή του σημείου της επιφάνειας της γης που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το πραγματικό κέντρο του σεισμού) είναι χρήσιμος για την πρόβλεψη ζημιών και της συμπεριφοράς μελλοντικών σεισμών. Μια τεχνική για να προσδιοριστεί το επίκεντρο περιλαμβάνει τον υπολογισμό της απόστασής του από έναν σεισμογράφο. Αυτό μπορεί να γίνει με τη μελέτη των διαφορετικών κυμάτων που παράγονται από τον σεισμό (σεισμικά κύματα). Αυτοί οι τύποι κυμάτων περιλαμβάνουν τα κύματα P (πρωτεύοντα κύματα) και τα κύματα S (δευτερεύοντα κύματα). Από μια σεισμική δόνηση ξεκινούν ταυτόχρονα τόσο τα κύματα P όσο και τα κύματα S . Τα κύματα P ταξιδεύουν πιο γρήγορα κοντά στην επιφάνεια της γης από τα κύματα S .

α) Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα περιγράφει τις πληροφορίες που αφορούν τα κύματα P και S; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



β) Κοντά σε έναν σειсмоγράφο τα κύματα P ταξιδεύουν με ταχύτητα 7,6 km/s και τα κύματα S με ταχύτητα 4,5 km/s. Το κύμα P φτάνει στο σειсмоγράφο 19sec (δευτερόλεπτα) πριν από το κύμα S. Ο σειсмоγράφος απέχει από το επίκεντρο του σεισμού απόσταση d και t_P είναι ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα P, για να φτάσει από το επίκεντρο του σεισμού στον σειсмоγράφο. Να βρείτε:

- Τις εξισώσεις των ευθειών (P) και (S) που αναπαριστούν την κίνηση των κυμάτων P και S αντίστοιχα.
- Τον χρόνο που χρειάζεται το κάθε κύμα, για να φτάσει από το επίκεντρο του σεισμού στον σειсмоγράφο, και την απόσταση d του σειсмоγράφου από το επίκεντρο του σεισμού.

38810. Η Νεφέλη και ο Ιάσωνας θέλουν να ανοίξουν ένα μικρό καφέ στη γειτονιά τους και, για να πραγματοποιήσουν το σχέδιό τους, σκέφτονται να επενδύσουν ένα αρχικό κεφάλαιο μαζί. Αφού συζήτησαν τα οικονομικά τους, η Νεφέλη αποφάσισε να επενδύσει 4.000 ευρώ περισσότερα από τον Ιάσωνα.

α) Αν x είναι το ποσό που θα επενδύσει ο Ιάσωνας, να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει το συνολικό ποσό που θα επενδύσουν μαζί ως συνάρτηση του x .

β) Ο λογιστής τους τους ενημέρωσε ότι για να έχουν μια πιο ασφαλή επένδυση, θα πρέπει το συνολικό ποσό που θα επενδύσουν να είναι από 16.000 ευρώ έως 30.000 ευρώ.

- Πόσο είναι το μικρότερο και πόσο το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να επενδύσει ο Ιάσωνας;
- Οι οικονομίες της Νεφέλης είναι 20.000 ευρώ. Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσε να επενδύσει όλο αυτό το ποσό; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.
- Ποιο είναι το διάστημα των ποσών που μπορεί να επενδύσει η Νεφέλη;

γ) Η Νεφέλη σκέφτεται να επενδύσει 17.000 ευρώ και να δανείσει 3.000 ευρώ στον Ιάσωνα, ώστε να συμπεριλάβει τα χρήματα αυτά στο δικό του αρχικό κεφάλαιο. Αν x είναι το ποσό που έχει στην άκρη ο Ιάσωνας, να γράψετε και να λύσετε μία ανίσωση, η οποία να προσδιορίζει τα χρήματα που έχει ήδη αποταμιεύσει, ώστε το συνολικό ποσό επένδυσης και των δύο φίλων να μην υπερβαίνει τις 30.000 ευρώ.

38832. Στο αεροδρόμιο της πόλης έχει εγκατασταθεί ένας σταθμός με στατικά ποδήλατα γυμναστικής. Οι επιβάτες μπορούν να χρησιμοποιούν τα ποδήλατα για να φορτίζουν τις ηλεκτρικές τους συσκευές (κινητά τηλέφωνα, tablet, κλπ), παράγοντας ηλεκτρική ενέργεια με τη δική τους δύναμη. Κάθε ποδήλατο μπορεί να παράγει ενέργεια που μετατρέπεται σε ηλεκτρισμό με τη χρήση γεννήτριας. Ο σταθμός αποτελεί μέρος του προγράμματος βιωσιμότητας του αεροδρομίου, που έχει ως στόχο να ενισχύσει τη χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και να μειώσει την κατανάλωση από το δίκτυο. Κάθε ποδήλατο παράγει περίπου β Wh (βατώρες) για κάθε 20 λεπτά συνεχούς χρήσης. Το 80% της παραγόμενης ενέργειας μετατρέπεται σε

ηλεκτρική ενέργεια, χρήσιμη για φόρτιση των συσκευών, ενώ το υπόλοιπο χάνεται ως θερμότητα. Μια τυπική ηλεκτρική συσκευή χρειάζεται περίπου $10Wh$ για μία πλήρη φόρτιση.

α) Αν ένα ποδήλατο χρησιμοποιείται για 20 λεπτά συνεχώς, πόση ενέργεια φτάνει τελικά στη συσκευή για φόρτιση;

β) i. Αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια που φτάνει τελικά στις συσκευές είναι ανάλογη με το πόσα εικοσάλεπτα ποδηλατούν οι επιβάτες, ποια σχέση εκφράζει την ενέργεια (E) σε Wh που φτάνει στις συσκευές με το πλήθος (n) των εικοσάλεπτων;

ii. Να επιχειρηματολογήσετε υπέρ της δήλωσης: «η σχέση που συνδέει τον συνολικό αριθμό (D) των συσκευών που μπορούν να φορτιστούν με την ενέργεια (E), η οποία φτάνει σε αυτές, είναι της μορφής $D = \alpha E$ ». Να προσδιορίσετε τη σχέση αυτή.

γ) i. Η επιβατική κίνηση του αεροδρομίου για το 2024 ήταν 31.854.761 επιβάτες. Αν οι συσκευές που φορτίζονται κάθε μήνα είναι $D = 780.000$ και τα εικοσάλεπτα που ποδηλάτησαν επιβάτες είναι $n = 195.000$, πόσες Wh παρήγε κάθε ποδήλατο για 20 λεπτά συνεχούς χρήσης; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

ii. Το αεροδρόμιο πληρώνει στο δίκτυο ηλεκτρισμού 0,20 ευρώ ανά κιλοβατώρα (kWh). Πόσα χρήματα εξοικονομεί κάθε μήνα χρησιμοποιώντας τον σταθμό με τα στατικά ποδήλατα;

38811. Δύο ξαδέρφια, ο Γιώργος και ο Νίκος, ζούνε στο Αγρίνιο και στην Καβάλα αντίστοιχα. Αποφασίσανε μία ημέρα του Μαρτίου να καταγράψουν ταυτόχρονα τις θερμοκρασίες στις πόλεις τους ανά τρίωρο κατά τη διάρκεια ενός ολόκληρου 24ώρου και φτιάξανε τον παρακάτω πίνακα.

Ωρα (x)	Θερμοκρασία (T) στο Αγρίνιο ($^{\circ}C$)	Θερμοκρασία (T) στην Καβάλα ($^{\circ}C$)
00:00 (0)	10	7
03:00 (3)	12,5	9,5
06:00 (6)	15	12
09:00 (9)	17,5	14,5
12:00 (12)	20	17
15:00 (15)	22,5	19,5
18:00 (18)	19	16
21:00 (21)	15,5	12,5
00:00 (24)	12	9

α) Ποια είναι η διαφορά της θερμοκρασίας για κάθε ένα από τα διαδοχικά τρίωρα σε κάθε μία από τις δύο πόλεις το συγκεκριμένο 24ωρο που καταγράφηκαν οι θερμοκρασίες από τα δύο ξαδέρφια; Τι παρατηρείτε;

β) Με βάση τις τιμές από τα διαδοχικά τρίωρα που καταγράψανε τη συγκεκριμένη ημέρα τα δύο ξαδέρφια στις πόλεις τους, σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν από μία σχέση της μορφής $T(x) = ax + \beta$, για να εκφράσουν τη θερμοκρασία ως συνάρτηση της ώρας (x).

i. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις που παριστάνουν τις θερμοκρασίες των δύο πόλεων αυτό το 24ωρο ακολουθώντας τη σκέψη των δύο παιδιών.

ii. Ποιος από τους παρακάτω τύπους συνάρτησης θα μπορούσε να αναπαριστά τη θερμοκρασία T_A στην πόλη του Αγρινίου ως συνάρτηση της ώρας (x), σύμφωνα με τη σκέψη των δύο παιδιών;

$$1. T_A(x) = \begin{cases} -\frac{5}{6}x + 40, & \text{για } 0 \leq x \leq 12 \\ \frac{7}{6}x + 10, & \text{για } 15 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

$$2. T_A(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x + 10, & \text{για } 0 \leq x \leq 15 \\ -\frac{7}{6}x + 40, & \text{για } 15 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

$$3. T_A(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x - 10, & \text{για } 0 \leq x \leq 12 \\ \frac{7}{6} - 40, & \text{για } 15 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

$$4. T_A(x) = \begin{cases} -\frac{5}{6}x + 10, & \text{για } 0 \leq x \leq 15 \\ -\frac{7}{6}x + 40, & \text{για } 15 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

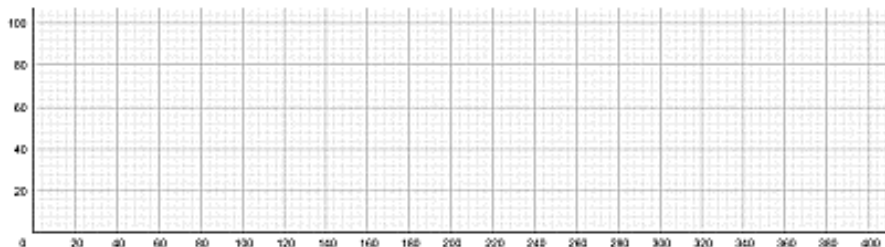
iii. Να κατασκευάσετε αντίστοιχα και τον τύπο της θερμοκρασίας T_E στην Καβάλα ως συνάρτηση της ώρας (x), ακολουθώντας και πάλι τη σκέψη των παιδιών.

γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή του συγκεκριμένου 24ώρου στην οποία οι δύο πόλεις να έχουν την ίδια θερμοκρασία;

38826. Μανώλης είναι σερβιτόρος σε ένα εστιατόριο και πληρώνεται 50€ την ημέρα συν τα φιλοδωρήματα, τα οποία είναι το 10% των χρημάτων που πληρώνουν οι πελάτες για φαγητό και ποτό.

α) Αν x είναι τα χρήματα που πληρώνουν οι πελάτες του εστιατορίου για φαγητό και ποτό, να εκφράσετε τα χρήματα y που εισπράττει ο σερβιτόρος κάθε ημέρα, σαν συνάρτηση του x .

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε στο α) ερώτημα, αν οι πελάτες πληρώνουν για φαγητό και ποτό από 0 έως και 400€ την ημέρα.



γ) Να βρείτε

i. Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο Μανώλης, αν μια ημέρα οι πελάτες πληρώσουν 312 € σε φαγητό και ποτό.

ii. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσουν οι πελάτες μια ημέρα, ώστε να εισπράξει ο Μανώλης από 105€ μέχρι και 120€.

δ) Ο Μανώλης, για να αυξηθούν οι αποδοχές του την επόμενη χρονιά, προσπαθεί να βρει πόσο πρέπει να ζητήσει να είναι το ποσοστό του επί των φιλοδωρημάτων, ώστε αν οι πελάτες ξοδέψουν 500 ευρώ, εκείνος να εισπράξει 15 ευρώ περισσότερα απ' όσα εισπράττει φέτος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε; Να εξηγήσετε την σκέψη σας.

38828. Ο Κώστας χρησιμοποιεί το κινητό του για διάφορες δραστηριότητες, οι οποίες καταναλώνουν δεδομένα με διαφορετικούς ρυθμούς. Θέλει να βρει το καλύτερο πακέτο δεδομένων ώστε να μην ξεπερνά το όριο του. Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας με την ημερήσια κατανάλωση δεδομένων ανά δραστηριότητα:

Δραστηριότητα	Κατανάλωση ανά ώρα (MB)	Μέση ημερήσια χρήση (ώρες)
Πλοήγηση στο διαδίκτυο	250 MB	1,5 ώρα
Social Media	150 MB	2 ώρες
Streaming βίντεο	700 MB	x ώρες
Online gaming	200 MB	1 ώρα

Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας του προσφέρει τα εξής πακέτα:

Πακέτο Α: 20 GB/μήνα

Πακέτο Β: 40 GB/μήνα

Πακέτο Γ: 60 GB/μήνα

α) Να εκφράσετε τη συνολική μέση ημερήσια κατανάλωση δεδομένων σε MB ως συνάρτηση των ωρών streaming βίντεο x , όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα.

β) Να εκφράσετε τη συνολική μέση μηνιαία κατανάλωση δεδομένων σε GB ως συνάρτηση των ωρών streaming βίντεο x , όπως προκύπτει από τον πίνακα. (μήνας ≈ 30 ημέρες)

γ) Πόσες ώρες streaming βίντεο μπορεί να έχει ο Κώστας, αν επιλέξει το πακέτο Α και πόσες αν επιλέξει το πακέτο Β;

δ) Αν θέλει να βλέπει τουλάχιστον 2 ώρες βίντεο την ημέρα, πόσα GB θα καταναλώνει το μήνα;

Υπάρχει κάποιο πακέτο από αυτά που προσφέρει η εταιρεία που τον καλύπτει;

ε) Αν επιλέξει τελικά το πακέτο Α, θα μπορούσε, αν περιορίσει με κάποιο τρόπο τις υπόλοιπες δραστηριότητές του, να εξοικονομήσει κάποιο χρόνο, για να παρακολουθεί βίντεο κάθε μέρα;

Αν ναι, προτείνετε πιθανούς τρόπους στον Κώστα.

38854. Μια ομάδα τουριστών θέλει να επισκεφτεί την Ελλάδα για μια εκδρομή 6 ημερών και 5 διανυκτερεύσεων. Ένα τουριστικό γραφείο τους κάνει την εξής προσφορά:

• Το κόστος του ξενοδοχείου είναι 80 ευρώ ανά άτομο για κάθε διανυκτέρευση.

• Τα αεροπορικά εισιτήρια (μαζί με την επιστροφή) κοστίζουν: 320 ευρώ το άτομο, αν ταξιδέψουν μέχρι 20

άτομα, 290 ευρώ το άτομο, αν ταξιδέψουν περισσότερα από 20 άτομα.

- Το πούλμαν που θα χρησιμοποιήσουν για να περιηγηθούν στην Ελλάδα κατά τις ημέρες διαμονής τους, κοστίζει:

1.500 ευρώ για μέχρι 30 άτομα και

2.400 ευρώ για περισσότερα από 30 άτομα.

Η εκδρομή μπορεί να πραγματοποιηθεί, αν η ομάδα των τουριστών αποτελείται από 15 έως 50 άτομα.

α) Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος της εκδρομής για 18, για 25 και για 40 τουρίστες.

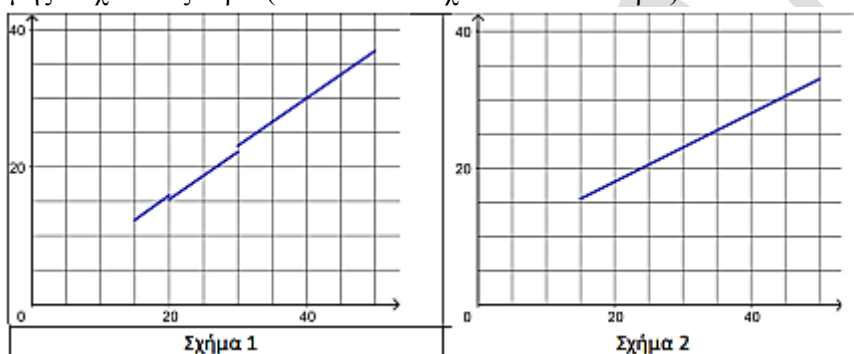
β) Αν x είναι το πλήθος των τουριστών, να γράψετε μια συνάρτηση με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος της εκδρομής:

i. Αν $15 \leq x \leq 20$

ii. Αν $20 < x \leq 30$

iii. Για άλλες τιμές του x .

γ) Στο σχήμα 1 παριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος β), ενώ στο σχήμα 2 παριστάνεται μια αντίστοιχη γραφική παράσταση για το κόστος της εκδρομής με ένα άλλο τουριστικό γραφείο. Στο οριζόντιο άξονα είναι το πλήθος των τουριστών, ενώ στον κατακόρυφο είναι το συνολικό κόστος της εκδρομής σε χιλιάδες ευρώ (το 20 αντιστοιχεί σε 20.000 ευρώ).



Να εξετάσετε αν κάποια από τις δύο προσφορές είναι φθηνότερη, ανεξάρτητα από το πλήθος των τουριστών. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

38856. Ο Στέφανος μετακομίζει σε μια νέα πόλη για σπουδές και σκέφτεται να χρησιμοποιεί ποδήλατο για τις καθημερινές του μετακινήσεις. Προβληματίζεται όμως αν τον συμφέρει να αγοράσει καινούριο ποδήλατο ή να νοικιάσει ποδήλατο με το μήνα. Το ποδήλατο που του αρέσει κοστίζει καινούριο 400 ευρώ και υπολογίζει επίσης ότι θα έχει μηνιαία έξοδα για τη συντήρησή του κατά μέσο όρο 10 ευρώ. Ταυτόχρονα ρώτησε σε ένα μαγαζί όπου νοικιάζουν ποδήλατα και η ενοικίαση ποδηλάτου κοστίζει 35 ευρώ τον μήνα, αλλά χωρίς να έχει έξτρα έξοδα συντήρησης.

α) Ο Στέφανος θα χρησιμοποιήσει το ποδήλατο για 5 μήνες στις μετακινήσεις του. Πόσο θα πληρώσει συνολικά:

i. Αν αγοράσει ποδήλατο;

ii. Αν νοικιάσει ποδήλατο;

β) Να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει τα συνολικά έξοδα του Στέφανου, αν αγοράσει και χρησιμοποιήσει το ποδήλατο για x μήνες, και μία σχέση για τα έξοδά του, αν νοικιάσει και χρησιμοποιήσει ποδήλατο για x μήνες.

γ) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα σε μήνες, για το οποίο η αγορά καινούριου ποδηλάτου συμφέρει τον Στέφανο οικονομικά περισσότερο από τη μηνιαία ενοικίαση.

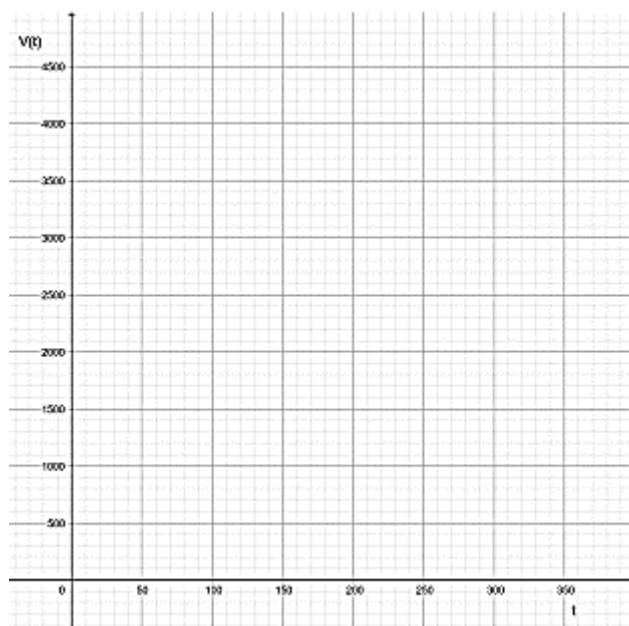
δ) Σύμφωνα με έναν οικονομικό προϋπολογισμό που έκανε ο Στέφανος, τα έξοδά του για τη μετακίνησή του με το ποδήλατο δεν θέλει να ξεπεράσουν τα 600 ευρώ συνολικά τον πρώτο χρόνο των σπουδών του.

i. Ποια είναι η μεγαλύτερη χρονική διάρκεια, σε μήνες, που μπορεί να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο, αν το αγοράσει, και ποια, αν το νοικιάσει;

ii. Σε ποια ή ποιες από τις δύο επιλογές (αγορά ή ενοικίαση) τα ετήσια έξοδα για τη μετακίνησή του θα είναι εντός του προϋπολογισμού του;

38862. Οι επιστήμονες παρακολουθούν το λιώσιμο ενός παγετώνα λόγω της κλιματικής αλλαγής. Η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο του παγετώνα $V(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου t δίνεται από τον τύπο $V(t) = 4.500 - 15t$, όπου t είναι τα έτη μετά το 2020, π.χ. το $t = 5$ δηλώνει το 2025.

- α)** Να περιγράψετε τι εκφράζουν, στο πλαίσιο του προβλήματος, οι αριθμοί 4.500 και 15 στον τύπο της συνάρτησης $V(t)$.
- β)** Να υπολογίσετε ποιος περίπου θα είναι ο όγκος του παγετώνα το έτος 2040.
- γ)** Να υπολογίσετε σε ποιο έτος ο όγκος του παγετώνα θα πέσει κάτω από 500m^3 , αν συνεχιστεί ο ίδιος ρυθμός λιώσιματος που παρατήρησαν οι επιστήμονες.
- δ) i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(t)$ ως συνάρτηση του t .
- ii.** Να ελέγξετε αν το σημείο $(300,0)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.
- iii.** Αν ναι, να ερμηνεύσετε το σημείο αυτό στο πλαίσιο του προβλήματος που αφορά τον όγκο του παγετώνα και το λιώσιμο των πάγων.



38866. Ακούμε συχνά στα δελτία καιρού φράσεις όπως: «Η θερμοκρασία αύριο θα κυμανθεί μεταξύ 24 και 30 βαθμών Κελσίου, ενώ η “αισθητή θερμοκρασία” θα βρίσκεται μεταξύ 22 και 26 βαθμών». Είναι σύνηθες για τους μετεωρολόγους να δίνουν τόσο την αναμενόμενη θερμοκρασία του αέρα όσο και τη θερμοκρασία που πραγματικά αισθάνεται κάποιος (αισθητή θερμοκρασία), η οποία εξαρτάται από την ταχύτητα του ανέμου, τη σχετική υγρασία και τη θερμοκρασία του αέρα. Έτσι, για παράδειγμα, η αισθητή θερμοκρασία για πραγματική θερμοκρασία 0°C και ταχύτητα ανέμου $v = 10\text{mph}$ (μίλια την ώρα) είναι $-5,5^\circ\text{C}$. Ένας τύπος που επινοήθηκε από Αμερικανούς επιστήμονες κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου και βασίζεται σε πειραματικά στοιχεία είναι ο ακόλουθος: Για $v > 5\text{mph}$, η αισθητή θερμοκρασία δίνεται από τον τύπο:

$$T - 33 = (0,45 + 0,29\sqrt{v} - 0,02v)(t - 33) \quad (1)$$

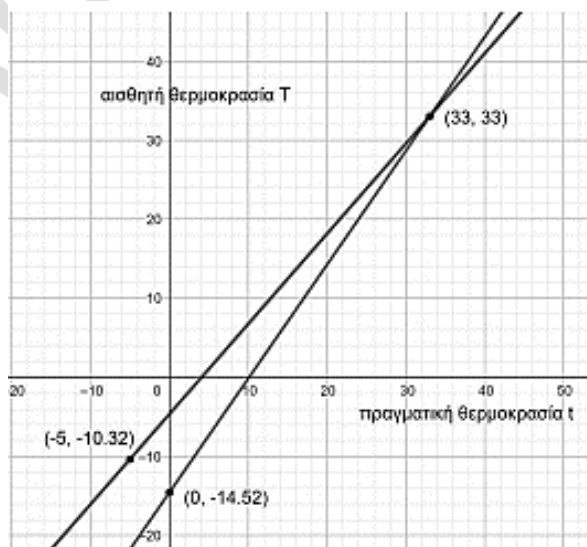
όπου t είναι η θερμοκρασία του αέρα v είναι η ταχύτητα του ανέμου σε mph.

- α)** Να υπολογίσετε την αισθητή θερμοκρασία T , όταν $v = 9\text{mph}$ και
- i.** $t = -5^\circ\text{C}$ **ii.** $t = 0^\circ\text{C}$ **iii.** $t = 33^\circ\text{C}$.

Όπως προκύπτει από τον τύπο (1), η σχέση της αισθητής θερμοκρασίας T με την πραγματική t μπορεί να γραφεί και ως $T = (0,45 + 0,29\sqrt{v} - 0,02v) \cdot t - 33(0,45 + 0,29\sqrt{v} - 0,02v) + 33$ που είναι εξίσωση ευθείας

$T = at + \beta$, με $a = (0,45 + 0,29\sqrt{v} - 0,02v)$ και $(0,45 + 0,29\sqrt{v} - 0,02v) + 33$.

Δυο τέτοιες ευθείες για $v = 9\text{mph}$ και για $v = 81\text{mph}$ δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



- i.** Να δείξετε ότι και για $v = 10\text{mph}$, η ευθεία θα διέρχεται από το σημείο $(33,33)$.

ii. Να εξηγήσετε ότι για οποιαδήποτε ταχύτητα v του ανέμου, η ευθεία $T = at + \beta$ διέρχεται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε. Πώς ερμηνεύεται αυτό στο πλαίσιο του προβλήματος;

iii. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα v του ανέμου, ώστε η αισθητή θερμοκρασία να είναι $T = 33^\circ\text{C}$, οποιαδήποτε κι αν είναι η πραγματική θερμοκρασία t ;

Δίνεται ότι $\sqrt{1201} \approx 35$

38873. Ένα γραπτό τεστ γνώσεων αποτελείται από 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, καθεμία από τις οποίες έχει μοναδική σωστή απάντηση. Υπάρχουν δύο τρόποι να βαθμολογηθεί το τεστ:

• Πρώτος τρόπος: Κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε 5 μονάδες, χωρίς «αρνητική βαθμολογία», δηλαδή χωρίς κανείς να χάνει μονάδες για κάθε λανθασμένη απάντηση.

• Δεύτερος τρόπος: Κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε 4,5 μονάδες και υπάρχει «αρνητική βαθμολογία» 0,5 μονάδα για κάθε λανθασμένη, ενώ 10 επιπλέον μονάδες παίρνει κανείς, αν παραδώσει το τεστ πλήρως απαντημένο (δεν έχει μείνει καμία ερώτηση αναπάντητη).

α) Πόσους βαθμούς θα πάρει με τον πρώτο και με τον δεύτερο τρόπο βαθμολόγησης ένα πλήρως απαντημένο τεστ με καμία σωστή απάντηση και πόσους ένα άλλο με μόνο δύο σωστές απαντήσεις;

β) Βαθμολογούμε ένα πλήρως απαντημένο τεστ και με τους δύο τρόπους. Δίνει κάποιος από τους τρόπους βαθμολόγησης μεγαλύτερη βαθμολογία, ανεξάρτητα από το πλήθος των σωστών απαντήσεων;

γ) Από τον φορέα που σχεδίασε το τεστ προτάθηκε ένας τρίτος τρόπος βαθμολόγησης. Σύμφωνα με αυτόν, αν x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων του απαντημένου τεστ, τότε η βαθμολογία του δίνεται από τη

$$\text{συνάρτηση: } f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 4 \\ 6,5x - 20, & 4 \leq x \leq 18 \\ 100 & , 18 < x \leq 20 \end{cases}$$

Βαθμολογούμε ένα πλήρως απαντημένο τεστ με τον πρώτο και με τον τρίτο τρόπο. Πόσες πρέπει να είναι οι σωστές απαντήσεις, ώστε το τεστ αυτό να πάρει μεγαλύτερη βαθμολογία με τον τρίτο τρόπο βαθμολόγησης;

38921. Ένας σημαντικός παράγοντας που καθορίζει την κατανάλωση καυσίμου ενός αυτοκινήτου κατά την κίνησή του είναι οι δυνάμεις αντίστασης που ασκούνται σε αυτό. Μια δύναμη αντίστασης είναι η αντίσταση κύλισης F_k , η οποία οφείλεται στα ελαστικά και δίνεται από μια σχέση της μορφής $F_k = A \cdot v + B$

όπου v η ταχύτητα σε m/sec, F_k η αντίσταση κύλισης σε N (Newton) και οι συντελεστές A και B εξαρτώνται από το είδος των ελαστικών και το βάρος του αυτοκινήτου.

α) Μια εταιρεία μέτρησε την αντίσταση κύλισης F_k ενός αυτοκινήτου και σχεδίασε το διπλανό διάγραμμα.

i. Πόση είναι η αντίσταση κύλισης, όταν το αυτοκίνητο κινείται με 25 m/sec;

ii. Να υπολογίσετε τους συντελεστές A και B της σχέσης που δίνει την αντίσταση κύλισης F_k .

β) Η αντίσταση κύλισης για ένα μοντέλο αυτοκινήτου για δύο διαφορετικούς τύπους ελαστικών, δίνεται από τις σχέσεις

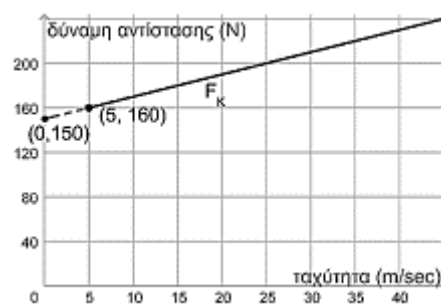
$$F_{k1} = 2v + 150, v > 0 \text{ για τον } 1^\circ \text{ τύπο και } F_{k2} = 2,25v + 147, v > 0 \text{ για τον } 2^\circ \text{ τύπο.}$$

2° τύπο.

i. Δύο οδηγοί με το συγκεκριμένο μοντέλο αυτοκινήτου, κινούνται με ταχύτητα περίπου 20 m/sec (δηλαδή με 72 km/h). Ο ένας χρησιμοποιεί τον 1° τύπο ελαστικών και ο άλλος τον 2°. Ποιο αυτοκίνητο έχει τη μικρότερη κατανάλωση καυσίμου;

ii. Ένας τρίτος οδηγός που κινείται κυρίως μέσα στην πόλη, με το ίδιο μοντέλο αυτοκινήτου, επέλεξε τον 1ο τύπο ελαστικών. Με δεδομένο ότι η ταχύτητα στην πόλη είναι συνήθως μικρότερη από 40 km/h, ήταν σωστή η επιλογή του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Δίνεται ότι $12 \text{ m/sec} \approx 43 \text{ km/h}$)



Θέμα 3ο

14576. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.
 γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

1ο θέμα

14829. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|-a| = a$.

iii. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

iv. Αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $b^2 - 4a\gamma > 0$.

v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α , β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

14731. Α. Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

β) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |-a| + |\beta|$.

γ) Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

δ) Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

ε) Αν είναι $\alpha\beta > 1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha > 1$ και $\beta > 1$.

Β. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , τότε να αποδείξετε ότι

$$\text{το άθροισμά τους είναι ίσο με } x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}.$$